$$\int\limits_{\text{15 июня 2014}}^{\text{28 июня 2014}} \left(\begin{array}{c} \text{Московская ЛШ} \\ \text{секция математики} \end{array} \right) \mathrm{d}t$$

Немного о группах

На Летней Школе, школьники *x класса* — это школьники, которые только перешли в x класс и будут учится в нём со следующей осени. Например, школьники 9 класса — это те, кто только что закончил восьмой.

Группы «7,8-1» (Пингвины) и «7,8-2» (Кенгуру) были сформированы из школьников 7 и 8 классов. Участники были разделены между группами по результатам отборочной олимпиады (первая из групп сильнее).

Группа «9» (Носороги) была сформирована из школьников 9 класса.

Группы «10» (Зубры) и «11» (Зубры) были сформированы из сильнейших школьников соответствующих классов (*сильнейших* по результатам различных олимпиад и впечатлениям руководителей кружков, которые эти школьники посещали).

Группа «10,11» (Гризли) была сформирована из школьников 10 и 11 классов, не вошедших в предыдущие две группы.

Немного о структуре

Материалы разбиты по группам, в пределах каждой группы отсортированы по темам:

- олимпиады;
- алгебра;
  - теория чисел;
  - неравенства;
- геометрия;
- комбинаторика;
  - теория графов.

Олимпиады, общие для групп «7,8», вынесены в начало.

Содержание

Отборочная устная олимпиада, 7–8 классы

Довывод

1. Мальчик Вася пошел к речке с двумя пустыми ведрами. Объем одного равен пяти литрам, а объем второго Вася забыл, но помнит, что он равен либо трем, либо четырем литрам. Как выяснить объем этого ведра? (Разрешается наполнять любой из сосудов до краев из речки, выливать всё содержимое в речку и переливать из одного сосуда в другой, сколько получится, то есть либо до краев, либо всё, что было.)

2. Разрежьте треугольник на маленькие треугольники так, чтобы ни у каких двух маленьких треугольников стороны не совпадали.

3. Есть три человека: A, B и C. Один лжец (всегда лжет), один рыцарь (всегда говорит правду), один нормальный (говорит то ложь, то правду — как придется). A сказал «B правдивее C», B сказал «C правдивее A». Что ответит C на вопрос «A правдивее B?»? Считается, что рыцарь правдивее нормального, а нормальный правдивее лжеца.

4. Несколько клеток доски 10×20 покрашены в синий цвет. Петя разрезал его на прямоугольники так, что в каждом оказалось по пять синих клеток. Вася разрезал на прямоугольники так, что в каждом оказалось по семь синих клеток. Докажите, что Дима не сможет разрезать так, чтобы в каждом оказалось по шесть синих клеток.

5. Можно ли разбить числа от 1 до 21 на несколько групп так, чтобы наибольшее число в каждой группе было равно сумме остальных?

Вывод

6. Найти все пары простых чисел p и q такие, что $p^q + q^p$ тоже простое.

7. Докажите, что в любом выпуклом $2n$-угольнике найдется диагональ, не параллельная ни одной из сторон.

8. Клетки доски 100 на 100 красят в два цвета. Требуется, чтобы в любом квадрате два на два было по две клетки каждого цвета. Сколькими способами это можно сделать?

Послевывод

9. В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Пусть они пересекаются в точке H. Обозначим середину AH через M, а середину BC — через N.

Докажите, что B_1C_1 перпендикулярен MN.

10. В связном графе n вершин и m ребер. Сколькими способами можно выкинуть часть ребер так, чтобы в полученном графе степени всех вершин были четны?

Заключительная устная олимпиада, 7–8 классы

Довывод

1. Разрежьте квадрат 4×4 на 9 прямоугольников так, чтобы равные прямоугольники не соприкасались ни сторонами, ни вершинами.

2. Федя и Лева нашли на дороге по пачке 13-рублевок. В буфете Федя выпил 8 пакетов сока, съел 4 сникерса и 9 бутербродов. Лева выпил 3 пакета сока, съел 8 сникерсов и 5 бутербродов. Пакет сока, сникерс и бутерброд стоят по целому числу рублей. Оказалось, что Федя может расплатиться 13-рублевками без сдачи. Покажите, что это может сделать и Лева.

3. На шахматной доске 8×8 расставлено максимальное количество слонов так, что никакие два не угрожают друг другу. Докажите, что количество способов сделать это является точным квадратом.

Вывод

4. Найдите наименьшее натуральное число, которое не делится на 11, но если уменьшить или увеличить любую его цифру на 1, то полученное число будет делиться на 11. *(Замечание: цифру 0 нельзя уменьшать, а цифру 9 — увеличивать).*

5. Имеется 25 кусков сыра разного веса. Всегда ли можно один из этих кусков разрезать на две части и разложить сыр в два пакета так, что части разрезанного куска окажутся в разных пакетах, веса пакетов будут одинаковы и число кусков в пакетах также будет одинаково?

6. *Высотой* пятиугольника назовем отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины на противоположную сторону, а *медианой* — отрезок, соединяющий вершину с серединой противоположной стороны. Известно, что в некотором выпуклом пятиугольнике равны 10 длин — длины всех высот и всех медиан. Докажите, что этот пятиугольник правильный (то есть со всеми равными углами и равными сторонами).

Послевывод

7. Положительные числа x, y, z таковы, что $x + y = (y + z)^2$, $y + z = (x + z)^2$, $x + z = (x + y)^2$. Найдите эти числа.

8. В однокруговом футбольном турнире участвуют n команд (любые две команды сыграли ровно один матч между собой). При каких n турнир мог закончиться так, что у каждой команды количество ничьих равно количеству поражений?

9. Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром O, пересекаются в точке M, $\angle AMB = 60°$. На сторонах AD и BC во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники ADK и BCL. Прямая KL пересекает описанную около $ABCD$ окружность в точках P и Q. Докажите, что $OK = LO$.

Бонус для умников

10. Миша задумал целое число, большее чем 100. Аня называет целое число, большее чем 1. Если Мишино число делится на это число, Аня выиграла, иначе Миша вычитает из своего числа названное, и Аня называет следующее число. Ей запрещается повторять числа, названные ранее. Если Мишино число станет отрицательным — Аня проигрывает. Есть ли у нее выигрышная стратегия?

Часть I

Группа «7,8-2» (Кенгуру)

Прогрессии и другая борьба с многоточием

Последовательность, члены которой связаны соотношением вида $a_n = a_{n-1} + d$, называется *арифметической прогрессией*. Число d называется *разностью* прогрессии, а число a_1 — первым членом.

Последовательность *без нулевых членов*, для которой рекуррентное соотношение имеет вид $b_n = q \cdot b_{n-1}$, называется *геометрической прогрессией*. Число q называется *знаменателем* этой прогрессии.

Последовательность $\{a_n\}$ является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда любой её член равен среднему арифметическому двух своих соседей.

Последовательность $\{b_n\}$ является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда она не содержит нулей и для любого n справедливо $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$.

Пусть $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия с разностью d. Докажем и *запомним*, что

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2} \qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n\frac{a_1 + a_n}{2}\ .$$

Пусть $\{b_n\}$ — геометрическая прогрессия со знаменателем $q \neq 1$. Докажем, что

$$\underbrace{b_1 + b_2 + \ldots + b_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}}_{\textit{запомните!}} \qquad b_1 b_2 \ldots b_n = b_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}\ .$$

Интересно, а как устроены последовательности, основанные на других средних...

1. В концах диаметра окружности стоят единицы. На первом шаге каждая из получившихся дуг делится пополам, и в её середине пишется сумма чисел, стоящих в концах. Затем то же самое делается с каждой из четырех полученных дуг и т. д. Такая операция проделывается n раз. Найдите сумму всех полученных чисел.

2. Найдите сумму $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$.

3. Найдите сумму $1 + 2 + 4 + \ldots + (2^n)$.

4. Найдите сумму n чисел $1 + 11 + 111 + \ldots + 11\ldots 11$.

5. Сумма первых n членов некоторой последовательности равна n^2 при любом n. Верно ли, что данная последовательность — арифметическая прогрессия?

6. Пусть S_n — сумма первых n членов арифметической прогрессии. Пусть для некоторых $m \neq n$ справедливо $S_m = S_n$. Найдите S_{m+n}.

7. Даны две арифметические прогрессии a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3. Известно, что числа $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, $a_3 + b_3$ образуют геометрическую прогрессию и что $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$. Докажите, что $a_1 = b_3$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_1$.

8. Найдите произведение первых трех членов арифметической прогрессии, если сумма ее первых трех членов равна 27, а сумма их квадратов равна 275.

9. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 91. Если увеличить эти члены на 25, 27 и 1 соответственно, то получатся три числа, образующие геометрическую прогрессию. Найдите ее седьмой член.

10. Сумма первого и третьего членов геометрической прогрессии равна 10; сумма второго и четвертого членов этой же прогрессии равна 20. Найдите эту геометрическую прогрессию.

11. Длины сторон прямоугольного треугольника являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Чему равна длина гипотенузы данного треугольника, если его площадь равна 1?

12. Числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что числа a^2+ab+b^2, b^2+bc+c^2, c^2+ca+a^2 также образуют арифметическую прогрессию.

13. Вычислите «хитрым» образом значение дроби

$$\frac{1+3+3^2+\ldots+3^{11}}{1+3+3^2+\ldots+3^5}$$

14. Докажите

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{98}-\frac{1}{99}+\frac{1}{100}>\frac{1}{5}$$

15. Докажите

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{100}>1$$

16. Сравните числа

$$A = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 19\cdot 20 \quad \text{и} \quad B = 1+2+3+\ldots+999999+1000000$$

17. Докажите, что найдется n такое, что

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>1000000$$

18. Докажите

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{2014^2-1}<\frac{3}{4}$$

19. Докажите

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{99^2}+\frac{1}{100^2}<\frac{99}{100}$$

Неравенства о средних

Пусть $a > 0$, $b > 0$. Тогда справедливы **неравенства между средними**:

$$\min(a, b) \leqslant \frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leqslant \max(a, b)$$

Докажите, что эти неравенства обращаются в равенства в том и только в том случае, когда $a = b$.

Четыре выписанные величины называются соответственно *средним гармоническим, средним геометрическим, средним арифметическим* и *средним квадратическим* чисел a и b.

1. Пусть $ab > 0$. Докажите, что $a/b + b/a \geqslant 2$.

2. Для положительных a и b докажите, что $(a+b)\sqrt{(a+b)/2} \geqslant a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$.

3. Докажите, что если произведение двух положительных чисел больше их суммы, то сумма больше четырех.

4. При каком x дробь $(81 + 16x^4)/x^2$ принимает наименьшее значение?

5. Что больше: $\sqrt{2013} + \sqrt{2015}$ или $2\sqrt{2014}$?

6. Пусть $x > 1$. Докажите, что $1/(x-1) + 1/(x+1) > 2/x$.

7. Пусть $x + y = 1$. Докажите, что $x^8 + y^8 \geqslant 1/128$.

8. Решите уравнение $x^4 + y^4 + 2 = 4xy$.

9. Докажите неравенство для положительных x, y, z: $xy + yz + xz \leqslant x^2 + y^2 + z^2$.

10. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $ab + bc + c \geqslant 12$, то $a + b + c \geqslant 6$.

11. Дано четыре положительных числа a, p, c, k, произведение которых равно 1. Докажите, что

$$a^2 + p^2 + c^2 + k^2 + ap + ac + pc + ak + pk + ck \geqslant 10.$$

12. Докажите неравенство для положительных a, b, c: $(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc$.

13. На доске написаны два числа. Каждый день преподаватель Лёва стирает с доски оба числа и пишет вместо них их среднее арифметическое и среднее гармоническое. Утром первого дня на доске были написаны числа 1 и 2. Найдите произведение чисел, записанных на доске вечером 2014-го дня.

Серия 1, сравнительно-простая

1. Число $3a + 5b$ делится на 11. Докажите, что число $5a + b$ тоже делится на 11.

Определение. Будем говорить что натуральные числа a и b сравнимы по модулю m и писать

$$a \equiv b \pmod{m},$$

если $(a - b)$ делится на m. Сама запись $a \equiv b \pmod{m}$ называется *сравнением.*

2. Докажите, пользуясь только определением, следующие свойства сравнений:
(a) $a \equiv a$ (рефлексивность);
(b) если $a \equiv b$, то $b \equiv a$ (симметричность);
(c) если $a \equiv b$ и $b \equiv c$, то $a \equiv c$ (транзитивность);
(d) если $a \equiv b$ и $c \equiv d$, то $a + c \equiv b + d$;
(e) если $a \equiv b$ то $ac \equiv bc$;
(f) если $a \equiv b$ и $c \equiv d$, то $ac \equiv bd$;
(g) если $a \equiv b$ то $a^n \equiv b^n$.
(Все сравнения взяты по одному и тому же модулю m.)

3. Решите в целых числах сравнение $3x \equiv 239 \pmod{6}$.

4. $A = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ — натуральное число. Докажите, что
(a) $A \equiv \overline{a_1 a_0} \pmod{4}$;
(b) $A \equiv \overline{a_2 a_1 a_0} \pmod{8}$;
(c) $A \equiv a_0 + a_1 + \ldots + a_n \pmod{9}$;
(d) $A \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n a_n \pmod{11}$.

5. Докажите, что **(a)** при натуральных a и n $a^n - 1$ делится на $a - 1$;
(b) при натуральных a и b и нечетном n число $a^n + b^n$ делится на $a + b$.

6. $A = (16a + 17b)(17a + 16b)$ делится на 11. Докажите, что A делится на 121.

7. Докажите, что $30^{99} + 61^{100}$ делится на 31.

8. Докажите, что простое число p входит в разложение $n!$ на простые множители с показателем

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots$$

Серия 2, сравнения и остатки

1. $A = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ — натуральное число. Докажите, что
(a) $A \equiv \overline{a_2 a_1 a_0} - \overline{a_5 a_4 a_3} + \overline{a_8 a_7 a_6} - \ldots \pmod{7}$;
(b) $A \equiv \overline{a_2 a_1 a_0} + \overline{a_5 a_4 a_3} + \overline{a_8 a_7 a_6} + \ldots \pmod{37}$.

2. Пусть $a \equiv b \pmod{m}$. Докажите, что $(a, m) = (b, m)$.

3. Пусть $ka \equiv kb \pmod{m}$ и $(k, m) = 1$. Докажите, что $a \equiv b \pmod{m}$.

4. Пусть p — простое число, и k — натуральное такое, что $(k, p) = 1$. Докажите, что среди остатков чисел $0{\cdot}k$, $1{\cdot}k$, $2{\cdot}k$, …, $(p-1){\cdot}k$ от деления на p встречаются все ровно по одному разу.

5. p и q — последовательные нечетные числа. Докажите, что $p^p + q^q$ делится на $p + q$.

6. Для любых натуральных a и n докажите, что $a^2 - a + 1 \mid a^{2n+3} + (a-1)^n$.

7. Докажите, что $109 \cdot 53 \cdot 83 + 40 \cdot 66 \cdot 96$ — составное.

8. $n^2 + 2n$ оканчивается на четверку. Найдите предпоследнюю цифру.

Серия 3, алгебраический разнобой

1. Вычислите:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{100^2}\right).$$

2. Вычислите:
(a) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}$; **(b)** $\frac{2\cdot 1+1}{1^2\cdot 2^2}+\frac{2\cdot 2+1}{2^2\cdot 3^2}+\ldots+\frac{2\cdot 99+1}{99^2\cdot 100^2}$.

3. **(a)** Докажите, что у 19^n сумма цифр хотя бы 10.
(b) Докажите, что сумма цифр числа 1981^n при любом натуральном n не меньше 19.

4. p, q, r — различные простые числа. Известно, что pqr делится на $p+q+r$. Докажите, что число $(p-1)(q-1)(r-1)+1$ является точным квадратом.

5. Решите в простых числах: $\left[\frac{p}{2}\right]+\left[\frac{p}{3}\right]+\left[\frac{p}{6}\right]=q$.

6. Докажите, что $3^{2^n}-1$ **(a)** делится на 2^{n+2}; **(b)** не делится на 2^{n+3}.

Неравенство треугольника

1. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D. Докажите, что отрезок AD короче хотя бы одного из отрезков AB, AC.

2. **(a)** На стороне AB треугольника ABC отметили точку D. Докажите, что $BD + DC < BA + AC$.
(b) Внутри треугольника ABC отмечена точка D. Докажите, что $BD+DC < BA + AC$.

3. Докажите, что сумма длин диагоналей выпуклого четырехугольника меньше периметра, но больше половины периметра.

4. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Докажите, что её длина меньше полусуммы сторон AB, AC.

5. Докажите, что сумма длин диагоналей выпуклого пятиугольника больше периметра, но меньше удвоенного периметра.

6. Отрезок XY лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что он короче самой длинной стороны треугольника.

7. На столе лежит несколько правильно идущих часов (циферблатами вверх; возможно, разного размера). Докажите, что в некоторый момент сумма расстояний от центра стола до концов всех минутных будет не меньше, чем сумма расстояний от центра стола до центров часов.

8. На плоскости проведена прямая l и отмечены точки A и B, лежащие по одну сторону от этой прямой. Найдите на прямой l такую точку X, чтобы длина ломаной AXB была минимальной.

9. Внутри треугольника ABC отмечена точка X. Докажите, что $P/2 < AX + BX + CX < P$, где P — периметр треугольника.

10. В четырехугольнике $ABCD$ угол A — тупой. F — середина BC. Докажите, что $2AF < DB + DC$.

Равенство треугольников

Основные задачи

1. В треугольнике ABC отрезок AM является одновременно медианой и высотой. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный ($AB = AC$).

2. Отрезки AC и BD пересекаются в точке K, причем точка K является серединой обоих отрезков. Докажите, что $AB = CD$ и $AB \parallel CD$.

3. В четырехугольнике $ABCD$ пары противоположных сторон параллельны: $AB \parallel CD$, $BC \parallel DA$. Докажите, что $AB = CD$ и $BC = DA$.

4. В четырехугольнике из предыдущей задачи диагонали AC и BD пересекаются в точке K. Докажите, что K является серединой отрезков AC и BD.

5. В треугольнике ABC медиана AM оказалась равна половине стороны BC. Докажите, что треугольник ABC — прямоугольный ($\angle A = 90°$).

6. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AD и BC параллельны, углы A и D равны. Докажите, что его стороны AB и CD равны.

Другие задачи

7. На диагонали AC квадрата $ABCD$ отмечена точка M так, что $AB = AM$. В точке M к отрезку AC восстановлен перпендикуляр, пересекающий сторону BC в точке N. Докажите, что $BN = MN = MC$.

8. На сторонах равностороннего треугольника ABC отметили точки P, Q, R (P лежит на AB, Q — на BC, R — на CA) так, что $AP : BP = BQ : CQ = CR : AR = 2 : 1$. Докажите, что стороны треугольника PQR перпендикулярны соответственным сторонам треугольника ABC.

9. Дан треугольник ABC. Из точки A вне треугольника отложены лучи AM и AN, так что $\angle MAB = \angle NAC$. Затем вершину B зеркально отразили относительно прямой AM, а вершину C — относительно AN. Отражённые вершины обозначим B' и C'. Докажите, что $BC' = B'C$.

10. В треугольнике ABC проведена медиана AM, середину которой обозначим буквой S. Прямая CS пересекает отрезок AB в точке T. Оказалось, что $BS = BM$. Докажите, что $AT = ST$.

11. Дан квадрат $ABCD$. На отрезке AB вне квадрата построен равносторонний треугольник ABX. На отрезке AC построен равносторонний треугольник ACY так, чтобы точки B и Y лежали по одну сторону от прямой AC. Докажите, что длина отрезка XY равна стороне исходного квадрата.

12. В равнобедренном $AB = AC$ треугольнике ABC биссектриса угла A вдвое короче биссектрисы угла B. Найдите углы треугольника ABC.

Геометрические неравенства

1. **(a)** В треугольнике ABC медиана AM короче половины стороны BC. Докажите, что $\angle A$ — тупой.
   (b) В треугольнике ABC медиана AM длиннее половины стороны BC. Докажите, что $\angle A$ — острый.
   (c) Докажите, что в прямоугольном треугольнике медиана, выпущенная из прямого угла, равна половине стороны, на которую она опирается.
2. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Могут ли все углы ACD, BDE, CEA, DAB, EBC быть тупыми?
3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, внутри которого содержится отрезок. Докажите, что его длина меньше чем длина самой длинной стороны или диагонали четырехугольника.
4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнено $AB + BD < AC + CD$. Докажите, что $AB < AC$.
5. Докажите, что в равнобедренном треугольнике с углом $80°$ при основании боковая сторона
   (d) меньше утроенного основания, **(e)** но больше удвоенного.
6. На основании BC равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отметили точку P, а на продолжении основания BC за точку C отметили точку Q. Оказалось, что $BP = CQ$. Докажите, что периметр треугольника APQ больше периметра треугольника ABC.
7. На стороне BC остроугольного треугольника ABC отмечена точка F. Как на сторонах AB, AC отметить E, D соответственно таким образом, чтобы периметр треугольника EDF был как можно меньше?

Комбинаторная геометрия

1. На дне морском сидят n крабов. После прилива они поменялись местами. Известно, что расстояние между любыми двумя крабами не увеличилось. Докажите, что на самом деле расстояние между любыми двумя крабами не изменилось.

2. Можно ли двумя прямыми разрезать выпуклый четырёхугольник на шесть частей? А невыпуклый четырёхугольник?

3. Докажите, что среди любых пяти точек *общего положения* (т. е. таких точек, что никакие три из них не лежат на одной прямой) можно выбрать четыре, являющиеся вершинами выпуклого четырёхугольника.

4. На плоскости проведено n прямых. Докажите, что части, на которые эти прямые делят плоскость, можно раскрасить в два цвета правильным образом (т. е. так, чтобы соседние части были окрашены в разные цвета).

5. На плоскости даны три шайбы. Хоккеист выбирает одну из шайб и бьёт по ней так, чтобы она пролетела между двумя другими. Может ли так оказаться, что после 25 бросков шайбы окажутся на исходных позициях?

6. Из точки плоскости выпущено n лучей. Известно, что угол между любыми двумя из них меньше 120°. Докажите, что из них можно выбрать два, так чтобы угол, образованный этими двумя лучами, содержал все остальные лучи.

7. **(a)** Существует ли замкнутая шестизвенная ломаная, пересекающая каждое своё звено ровно один раз?
(b) При каких n существует замкнутая n-звенная ломаная, пересекающая каждое своё звено ровно один раз?

8. На плоскости проведено n прямых *общего положения*, т. е. никакие три из этих прямых не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны.
(a) На сколько частей разбита плоскость?
(b) Сколько из этих частей неограниченны?
(c) Докажите, что одна из неограниченных частей — угол.

9. Докажите, что правильный треугольник со стороной 3 можно разбить на 2014 треугольников, все стороны которых больше 1.

Алгоритмические задачи. Поиск

На занятии

1. Иван загадал число от 1 до 4. Как за два вопроса узнать, что это за число?

2. Иван загадал число от 1 до 8. Как за 3 вопроса узнать, что это было за число?

3. Можно ли это узнать за два вопроса?

4. Вы все еще можете задать три вопроса, но должны сразу предъявить список из этих трех вопросов. Как узнать число?

5. Какое наименьшее число вопросов потребуется с заранее предъявленным планом для числа от 1 до 100?

6. Иван загадал число от 1 до n. Разрешено задавать ему вопросы, у которых не более 10 вариантов ответа. Какое наименьшее число заранее предъявленных вопросов потребуется, чтобы определить число?

7. То же самое, но задавать можно только обычные да/нет вопросы.

На дом

8. Иван загадал число от 1 до 8, но разрешил задавать вопросы: «Является ли твое число делителем числа X?». Как за три вопроса узнать число?

9. Иван загадал клетку квадрата 5 на 5. За один вопрос разрешается выбрать в квадрате клетчатый прямоугольник и спросить, лежит ли в нем загаданная клетка. За какое минимальное число вопросов можно угадать клетку?

10. Иван загадал число от 1 до 9. Разрешается задавать вопросы, на которые он может ответить «да», «нет» или «не знаю» (отвечает, как обычно, честно). Как за два вопроса узнать число?

11. Неторопливый мальчик Григорий загадал натуральное число от 1 до 21. Ему можно задавать вопросы вида «Твое число больше X?». Проблема в том, что Григорий отвечает на очередной вопрос только после того, как ему задали следующий (в частности, ответ на последний вопрос вы не получите никогда). Как за семь вопросов узнать число?

Алгоритмические задачи. Взвешивания

На занятии

1. *(разбор сразу)* Есть три монетки, среди которых одна фальшивая. Известно, что фальшивая монетка легче настоящей. Как за одно взвешивание определить фальшивую?

2. То же самое, но монеток уже 9, а взвешиваний два.

3. То же самое, но список взвешиваний надо предъявить заранее.

4. Какое минимальное число взвешиваний потребуется для определения легкой фальшивой из 26 штук?

5. Из трех монет одна фальшивая, но неизвестно, легче она настоящей или тяжелее. За какое наименьшее число взвешиваний можно понять, какая монета фальшивая, и как её вес соотносится с весом настоящей?

На дом

6. Среди восьми монет есть либо одна легкая фальшивая, либо все настоящие. Как за два взвешивания определить фальшивую, если такая есть?

7. Как за три взвешивания найти легкую фальшивую из 27, если список взвешиваний нужно предъявить заранее?

8. Есть 27 монет. Часть из них серебряные, остальные — медные (настоящая медная отличается по весу от настоящей фальшивой). Известно, что среди них ровно одна легкая фальшивая. Как найти её за три взвешивания?

Алгоритмические задачи. Разное

1. Обезьяна Анфиса живет в десятиэтажном доме и у неё есть два кокосовых ореха. Она хочет узнать, какой самый большой номер этажа, с которого можно скинуть орех, но он бы не разбился. Она может кидать орехи с разных этажей. Если орех разбился, его больше нельзя использовать. Как ей узнать ответ на свой вопрос, сделав четыре броска?

2. Дома у мальчика Пети в двадцати коробках лежат гвозди, причем во всех коробках число гвоздей разное. Пете можно задавать вопросы вида «В какой коробке больше гвоздей: в коробке №i или в коробке №j?». За какое наименьшее число вопросов можно гарантированно узнать, в какой коробке гвоздей больше всего?

3. Злобная Белоснежка захватила в плен трех гномов. Каждое утро происходит следующее: Белоснежка надевает на них колпаки красного или синего цвета (каждый гном видит чужие колпаки, но не видит своего). Потом они одновременно называют предполагаемый цвет своего колпака. Если хотя бы один ошибается, то все идут работать на рудники. Как им договориться заранее так, чтобы не идти работать в половине случаев?

Перечислительные задачи

Цепочки

1. В классе 20 человек. Сколькими способами можно выставить им оценки (от 2 до 5) за контрольную?

2. Сколько существует шестизначных чисел с цифрами одной четности?

3. Сколькими способами можно расставить числа от 1 до 100 по кругу?

4. Сколько существует десятизначных чисел, у которых среди любых трех цифр подряд все различны?

5. Есть четыре мальчика и четыре девочки. Сколькими способами можно посадить их на лавочку, чтобы пол детей чередовался?

6. Сколько существует цепочек длины десять из различных букв русского алфавита?

7. Сколькими способами можно переставить буквы в слове АНАГРАММА?

8. У сороконожки есть 40 носков и 40 ботинок. Она может надевать и в любом порядке с одним лишь условием: на каждую ногу надо сначала надеть носок, а только потом ботинок. Сколькими способами она может обуться?

Кучки

9. Сколько различных делителей у числа $2^{10}3^{7}5^{3}$?

10. Сколькими способами можно разбить класс из двадцати детей на три группы, причем так, чтобы в каждой группе было ненулевое количество человек?

11. Сколькими способами можно из этого же класса выбрать две волейбольные команды по шесть человек?

12. В классе 10 человек. Сколькими способами можно из них выбрать команду из пяти человек и назначить в ней капитана?

13. Сколькими способами можно выбрать из десяти человек больше половины людей?

14. Сколькими способами можно выбрать в множестве из десяти элементов два подмножества A и B, которые бы в объединении давали бы все множество?

Все ещё перечислительные задачи

Тренировка с цешечками

Через C_n^k обозначается количество способов выбрать набор из k предметов из множества из n различных предметов. Для этого числа имеется формула $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

В нижеследующих задачах нужно использовать определение, а не формулу!

1. Докажите, что $C_n^k = C_n^{n-k}$;

2. Докажите, что $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$;

3. Докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$;

4. Чему равно $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$?

В следующих задачах пользуйтесь, чем хотите:

5. Чему равно $C_{100}^0 + C_{100}^1 + \ldots + C_{100}^{49}$?

6. Пусть p — простое число, и $1 \leqslant k < p$. Докажите, что C_p^k делится на p.

Кучки, делающие вид, что они цепочки и цепочки, делающие вид, что они кучки

7. Есть шесть одинаковых яблок и десять одинаковых груш. Сколькими способами можно выложить их в ряд?

8. А если там есть ещё четыре апельсина?

9. Сколько существует шестизначных чисел, у которых каждая следующая цифра меньше предыдущей?

10. Сколькими способами можно выбрать четыре числа от 1 до 20, чтобы любые два выбранных числа отличались хотя бы на два?

11. Мальчик Петя пошел в магазин за пирожными. Пирожных в магазине пять типов, денег у Пети хватает на десять пирожных. Сколькими способами может Петя сделать покупки?

Включения-исключения

Вдогонку ко вчерашнему

Для тех, кто не решил вчерашнюю задачу №11

1. Сколькими способами можно написать в строчку 20 слов так, чтобы сначала было написано несколько (возможно, ноль) слов `МАМА`, потом несколько (возможно, ноль) слов `МЫЛА`, потом несколько (возможно, ноль) слов `РАМУ`? *(Указание: попробуйте свести эту задачу к вчерашней задаче №7.)*

2. А если ещё в конце несколько (возможно, ноль) слов `ДОЛГО`?

3. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x + y + z = 15$?

Включения-исключения

4. Сколько из чисел от 1 до 2000 делятся 2, 5 и 7, но не делятся на 4?

5. Среди животных в саванне некоторые умные, а некоторые красивые. Известно, что 20% умных ещё и красивы, а 25% красивых ещё и умны. Только заяц и ишак не являются ни умными, ни красивыми. Сколько всего животных, если их от 20 до 30?

6. Сколькими способами можно рассадить десять сторожей по четырем сторожкам, чтобы ни одна сторожка не оставалась без присмотра?

7. В каждой из комнат замка или пол, или потолок, или стены покрашен в зеленый. В 20 комнатах зеленый потолок, в 30 комнатах зеленый пол и в 10 комнатах зеленые стены. Кроме того, в двух комнатах зелеными являются и стены, и потолок, в трех комнатах зеленые и пол и потолок, и в четырех комнатах — стены и пол. Могло ли в замке быть 55 комнат?

8. Площадь комнаты — 6 кв. м., на нем лежат три ковра, каждый площадью три квадратных метра. Докажите, что какие-то два из них перекрываются по площади хотя бы в один квадратный метр.

9. На столе лежит несколько карточек. Известно, что для каждого натурального $n < 1000$ ровно на n карточках написаны какие-то делители числа n. Докажите, что для любого $n < 1000$ на одной из карточек написано число n.

Логические задачи

1. A говорит «Я лжец или B правдивец». Кто из A и B лжец, а кто правдивец?

2. Есть три человека A, B и C. A говорит «Мы все лжецы», B говорит «Ровно один из нас правдивец». Кто из них кто?

3. A: «Мы все лжецы». B: «Ровно один из нас лжец». Может ли B или C быть определен однозначно?

4. A: «Я лжец, а B — нет». Кем являются A и B?

5. Одному из двух аборигенов задали вопрос «Есть ли среди вас правдивец?». Его ответа оказалось достаточно, чтобы узнать правдивый ответ на этот вопрос. Какой же это ответ и кем был ответивший?

6. Пусть X и Y — какие-то утверждения. Обозначим через $X \oplus Y$ утверждение «Из X и Y ровно одно утверждение верно». Докажите:

1. $X \oplus$ «$2 + 2 = 5$» верно только если верно X;
2. $X \oplus$ «$2 + 2 = 4$» верно только если неверно X;
3. Пусть среди X, Y и Z верны какие-то два. Верно ли $X \oplus Y \oplus Z$?

7. Вы встретили аборигена, но не знаете лжец он или правдивец. Как за один вопрос выяснить у него, есть ли у него дома ручной крокодил?

8. Все так же, как и в предыдущей задаче, но абориген понимает русский, а отвечает на своем языке. В нем есть слова «ага» и «угу», которые означают да и нет, но вы не знаете, какое что означает. Как за один вопрос выяснить наличие крокодила?

9. Все так же, как и в прошлой задаче, но аборигена три. Один лжец, один правдивец и один нормальный. Как за три вопроса узнать, кто какой? (Нормальный отвечает как ему заблагорассудится.)

Комбинаторный разнобой

1. Сколькими способами можно расставить числа 1 и -1 в клетки квадрата 4×4, чтобы все суммы по строкам и столбцам были равны нулю?

2. Есть шоколадка 10×10. За одну операцию можно выбрать квадратик и съесть все квадратики, которые не ниже и не левее его. Сколько разных фигур можно получить таким образом?

3. Лампочки расставлены в виде квадрата 6×6. Исходно все они выключены. За одну операцию можно изменить состояние всех лампочек в некотором квадрате 2×2 на противоположное. Сколько разных конфигураций можно таким образом получить?

4. Есть два человека, A и B. Каждый из них либо лжец, либо правдивец, либо нормальный. A: «B правдивец». B: «A не правдивец». Докажите, что хотя бы один из них говорит правду, но не является правдивцем.

5. Куб со стороной 20 разбит на 8000 единичных кубиков. В каждом кубике написано число. Известно, что в любом столбике высоты 20 (в любом из трех направлений) сумма чисел равна единице. Выбран некоторый кубик, в нем написано число 10. Через этот кубик проходит три слоя $1\times20\times20$. Найдите сумму чисел вне этих слоев.

6. Петя загадал пару натуральных чисел и сообщил Вите, что их произведение равно 120. Помогите Вите создать три карточки так, чтобы, задав Пете вопросы «Есть ли задуманное тобой число на этой карточке» и получив на них ответы, угадать эту пару. Порядок чисел в паре не имеет значения.

Принцип крайнего

1. Можно ли разрезать кубик $3 \times 3 \times 3$ на кубики $1 \times 1 \times 1$, используя менее 6 разрезов?

2. На листке написано несколько целых чисел. Среди них, для любых двух чисел a и b есть третье, которое делится на a и на b. Докажите, что есть число, которое делится на каждое из остальных.

3. **(a)** Числа от 1 до 2013 выписали в ряд. Может ли разность любых двух соседних быть не менее 1007?
(b) Тот же вопрос, если числа от 1 до 2014.

4. По кругу стоят 100 действительных чисел так, что каждое число равняется полусумме двух соседей. Докажите, что все числа равны.

5. По кругу записаны 30 действительных чисел, каждое равное модулю разности двух следующих за ним по часовой стрелке (то есть разности с отброшенным знаком). Сумма всех чисел равна 300. Что это за числа и в каком порядке записаны?

6. На доске были написаны 5 действительных чисел. Сложив их попарно, получили следующие 10 чисел: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15. Какие числа были написаны?

7. На столе лежат несколько круглых монет, касаясь, но не перекрывая друг друга. Докажите, что какая-то монета касается не более пяти других. (Размеры монет могут быть любыми).

Графы, часть 1. Общие соображения

Определения

- Будем говорить, что задан *граф*, если дано множество его *вершин*, и про каждую пару вершин известно, соединены ли они *ребром.*
- *Степенью вершины* называется количество исходящих из нее ребер. Вершина, степень которой равна 1, называется *висячей.*
- Граф называется *связным*, если любые две вершины соединены *путем* по ребрам.
- *Деревом* называется связный граф без *циклов.*
- Граф называется *полным*, если любые две его вершины соединены ребром.

Задачи

1. Сколько ребер в полном графе на n вершинах?

2. Можно ли на плоскости нарисовать 15 отрезков так, чтобы каждый пересекал ровно 7 других?

3. *Лемма о рукопожатиях.* Сумма степеней вершин графа — четное число.

4. Докажите, что в любом дереве есть висячая вершина.

5. Сколько ребер в дереве на n вершинах?

6. Докажите, что:
(a) в дереве любые две вершины соединены ровно одним путем;
(b) если в графе любые две вершины соединены ровно одним путем, то граф — дерево.

7. У царя Гвидона было 7 сыновей. Среди его потомков ровно 50 имели по 3 сына, ровно 100 по одному сыну, а у остальных сыновей не было. Сколько всего потомков было у царя Гвидона?

8. *Остовное дерево.* Докажите, что в любом связном графе можно удалить несколько ребер так, чтобы полученный граф стал деревом.

9. В стране 101 город и из каждого города ведет не менее 50 дорог. Докажите, что из любого города можно добраться в любой другой (возможно с пересадками).

10. В области 9 поселков и 29 дорог. Докажите, что можно добраться по дорогам из любого поселка в любой другой.

11. В лагере у каждого пионера 20 друзей. Как только пионер узнает новость, он тут же сообщает ее своим друзьям. За завтраком один из пионеров узнал новость, и к обеду ее знал весь лагерь. За ужином двое пионеров поссорились. На следующий день за завтраком пионеру (не обязательно тому же) сообщают новость. Докажите, что к обеду о ней опять узнает весь лагерь.

12. В стране любые два города соединены либо авиалинией, либо железной дорогой. Министерство транспорта в рамках программы экономии хочет закрыть один из этих видов перевозок.

(a) Докажите, что оно может это сделать так, чтобы из любого города можно было добраться в любой другой.

(b) Каким числом пересадок можно гарантированно обойтись после этого?

Графы, часть 2. Двудольные

Определение. Граф называется *двудольным*, если его вершины можно разбить на два множества так, что никакие две вершины из одного множества не соединены ребром.

1. В классе каждый мальчик дружит с пятью девочками, а каждая девочка с семью мальчиками. В классе 17 парт (за каждой сидит не больше двоих) и 13 заядлых туристов. Сколько всего человек в классе?

2. Докажите, что в двудольном графе суммы степеней вершин каждого цвета равны между собой.

3. Какое максимальное количество ребер в двудольном графе:

(a) На b черных и w белых вершинах?

(b) На $2n$ вершинах? **(c)** На $2n+1$ вершинах?

4. В ряд выписано 17 натуральных чисел. Посчитали все суммы подряд идущих чисел (в том числе и суммы из одного числа). Какое наибольшее нечетных чисел могло оказаться среди данных сумм?

5. Замок в форме треугольника со стороной 100 м разбит на 100 треугольных залов со сторонами 1 м. В каждой стенке между залами есть дверь. Какое наибольшее число залов сможет обойти турист, не заходя ни в какой зал дважды?

6. **(a)** В квадрате 8×8 расставлены числа от 1 до 64 (каждое по одному разу). Можно узнавать сумму чисел в любых 2 соседних клетках. Можно ли понять, в какой клетке какое число?

(b) А если можно узнавать сумму чисел в соседних по вершине клетках?

(c) А если квадрат 9×9, и числа от 1 до 81 (оба варианта)?

7. **(a)** Докажите, что в двудольном графе нет циклов нечетной длины.

(b) Докажите, что дерево — двудольный граф.

(c) Докажите, что граф без нечетных циклов двудольный.

8. В математическом классе 20 мальчиков, и некоторые враждуют, причем двое, имеющих общего врага не враждуют между собой. Какое наибольшее количество враждующих пар может быть?

9. В классе каждый мальчик если идет в театр, то берет с собой всех знакомых девочек. Оказалось, что для любой компании мальчиков вместе с ними пойдет хотя бы столько же девочек. Докажите, что можно поставить в пару каждому мальчику знакомую девочку так, что ни одна девочка не попадет в две пары.

Графы, часть 3. Ориентированные

Определения

- Граф называется *ориентированным*, если для каждого ребра задано направление, в котором идет обход ребра.
- Ориентированный граф называется *сильно связным* если из любой вершины можно дойти по ребрам до любой другой.
- Ориентированный граф называется *полным (турнирным)*, если любые две его вершины соединены ребром.
- Ориентированный граф называется *односторонне связным*, если для любых двух вершин a и b можно добраться либо из a в b, либо из b в a.
- Ориентированный граф называется *слабо связным*, если из любой вершины можно добраться по ребрам до любой другой, возможно проходя против стрелок.

Задачи

1. Докажите, что в любом ориентированном графе сумма степеней исходящих ребер равна сумме степеней входящих ребер.

2. Докажите, что любой сильно связный граф является односторонне связным, а любой односторонне связный — слабо связным.

3. В некоторый момент однокругового шахматного турнира среди 100 участников все участники, кроме Барона Мюнхгаузена выиграли 21 партию и проиграли 22 партии. Сколько очков набрал Барон Мюнхгаузен к концу турнира?

4. Докажите, что в сильно связном связном турнирном графе есть две вершины, у которых равны как количество исходящих ребер, так и количество входящих.

5. **(a)** Докажите, что в любом турнирном графе есть путь, проходящий по разу по всем вершинам.

(b) А если граф сильно связный, то в нем есть цикл, проходящий по разу по всем вершинам.

6. Докажите, что в односторонне связном ориентированном графе можно нарисовать одно ребро так, чтобы он стал сильно связным. (Можно проводить ребро, соединяющее две уже соединенные вершины в обратном направлении.)

Часть II

Группа «7,8-1» (Пингвины)

Числа Фиббоначи

Определение. Последовательность чисел Фибоначчи

$$\{F_0,\, F_1,\, F_2,\, \ldots\} = \{0,\, 1,\, 1,\, 2,\, 3,\, 5,\, 8,\, 13,\, 21,\, 34,\, 55,\, 89,\, 144,\, 233,\, 377,\, 610,\, \ldots\}$$

задается условиями $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ $(n \geqslant 0)$.

Эти числа были впервые описаны в «Книге абака» (1202 г.) итальянского математика Леонардо Пизанского (Фибоначчи).

1. *Задача Леонардо Пизанского.* Некто приобрел пару кроликов и поместил их в огороженный со всех сторон загон. Сколько кроликов будет через год, если считать, что каждый месяц пара дает в качестве приплода новую пару кроликов, которые со второго месяца жизни также начинают приносить приплод?

2. *О том, как прыгают кузнечики.* Предположим, что имеется лента, разбитая на клетки и уходящая вправо до бесконечности. На первой клетке этой ленты сидит кузнечик. Из любой клетки кузнечик может перепрыгнуть либо на одну, либо на две клетки вправо. Сколькими способами кузнечик может добраться до n-ой от начала ленты клетки?

3. Некоторый алфавит состоит из 6 букв, которые для передачи по телеграфу кодированы так:

$$\cdot \qquad - \qquad \cdot\,\cdot \qquad -\,- \qquad \cdot\,- \qquad -\,\cdot$$

При передаче одного слова не сделали промежутков, отделяющих букву от буквы, так что получилась сплошная цепочка из точек и тире, содержащая 12 знаков. Сколькими способами можно прочитать переданное слово?

4. Чему равны числа Фибоначчи с отрицательными номерами F_{-1}, F_{-2}, $\ldots$, F_{-n}, $\ldots$?

5. *Делимость чисел Фибоначчи.* Докажите справедливость следующих утверждений:
(a) $2 \mid F_n \quad \Leftrightarrow \quad 3 \mid n$; **(b)** $3 \mid F_n \quad \Leftrightarrow \quad 4 \mid n$;
(c) $4 \mid F_n \quad \Leftrightarrow \quad 6 \mid n$;
(d) $F_m \mid F_n \quad \Leftrightarrow \quad m \mid n$ (при $F_m > 1$).

6. Докажите, что для любого натурального m существует число Фибоначчи F_n $(n \geqslant 1)$, кратное m.

7. *Тождество Кассини.* Докажите равенство для $n > 0$:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Будет ли тождество Кассини справедливо для всех целых n?

8. Докажите следующие свойства чисел Фибоначчи:

(a) $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$; **(b)** $F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$;

(c) $F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$; **(d)** $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$.

9. Докажите, что при $n \geqslant 1$ и $m \geqslant 0$ выполняется равенство

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_n F_{m+1}.$$

Попробуйте доказать его двумя способами: при помощи метода математической индукции и при помощи интерпретации чисел Фибоначчи из задачи 2. Докажите также, что тождество Кассини является частным случаем этого равенства.

10. Докажите равенства

(a) $F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$; **(b)** $F_{n+1}F_{n+2} - F_n F_{n+3} = (-1)^n$;

(c) $F_{3n} = F_n^3 + F_{n+1}^3 - F_{n-1}^3$.

11. Вычислите $F_{n+2}^4 - F_n F_{n+1} F_{n+3} F_{n+4}$.

12. Вычислите сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{2}{1\cdot 3} + \ldots + \frac{F_n}{F_{n-1}\cdot F_{n+1}}\ .$$

Серия 1, сравнительно-простая

1. $A = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ — натуральное число. Докажите, что
(a) $A \equiv a_0 + a_1 + \ldots + a_n \pmod 9$;
(b) $A \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n a_n \pmod{11}$;
(c) $A \equiv \overline{a_2a_1a_0} - \overline{a_5a_4a_3} + \overline{a_8a_7a_6} - \ldots \pmod 7$;
(d) $A \equiv \overline{a_2a_1a_0} + \overline{a_5a_4a_3} + \overline{a_8a_7a_6} + \ldots \pmod{37}$.

2. $A = (16a + 17b)(17a + 16b)$ делится на 11. Докажите, что A делится на 121.

3. Докажите, что $30^{99} + 61^{100}$ делится на 31.

4. Пусть $a \equiv b \pmod m$. Докажите, что $(a, m) = (b, m)$.

5. Пусть p — простое число.
(a) Докажите, что если $x^2 \equiv 1 \pmod p$, то $x \equiv \pm 1 \pmod p$.
(b) *Теорема Вильсона.* Докажите, что $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.
(c) Докажите, что если для $m > 1$ имеет место сравнение $(m-1)! \equiv -1 \pmod m$, то m — простое.

6. Докажите, что простое число p входит в разложение $n!$ на простые множители с показателем
$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots$$

7. Докажите, что при всех натуральных n имеет место равенство $[1, 2, 3, \ldots, 2n] = [n+1, n+2, \ldots, 2n]$.

8. Для любого натурального n строится бесконечная последовательность n, $d(n)$, $d(d(n))$, $\ldots$, где $d(k)$ — число натуральных делителей числа k. Найдите все такие n, для которых в соответствующей последовательности нет полных квадратов.

Серия 2, всё ещё сравнения, но посложнее

1. Докажите, что следующие числа делятся на 1993:
(a) $91! \cdot 1901! - 1$; **(b)** $92! \cdot 1900! + 1$.

2. Решите сравнение $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{1987}$.

3. p, q — различные простые нечетные числа. Докажите, что $p^q + q^p \equiv p + q \pmod{pq}$.

4. Докажите, что если $p = 4n - 1$ простое и $(2k-1, p) = 1$, то $(n + k^2 - k)^{2n-1} \equiv 1 \pmod p$.

5. p и q — последовательные нечетные числа. Докажите, что $p^p + q^q$ делится на $p + q$.

6. Докажите, что если число $a = 2^{2k}+2^k+1$ не является делителем числа $(2^{2^k+1} - 1)$, то a — составное.

7. При каких целых k число $a^3 + b^3 + c^3 - kabc$ делится на $a + b + c$, при любых целых a, b, c, сумма которых не равна 0?

Серия 3, про показатели

1. Натуральное число n таково, что $2^n - 2$ делится на n. Докажите, что $2^{2^n-1} - 2$ делится на $2^n - 1$.

2. Пусть p, q — простые числа, $q > 5$. Докажите, что если $q \mid 2^p + 3^p$, то $q > p$.

3. Найдите все такие простые числа p и q, что $2^p + 1$ делится на q, а $2^q + 1$ делится на p.

4. Найдите все пары (p, q) простых чисел такие, что число $2^p - 1$ делится на q, и среди простых делителей числа $q - 1$ имеются только числа 2, 3, 5 и 7.

5. Найдите все нечетные числа n, такие, что $3^n + 1$ делится на n.

6. Даны натуральные числа a и n. Докажите, что $n \mid \varphi(a^n - 1)$.

7. a, b, p — натуральные числа, такие, что $a \equiv b \pmod p$. Докажите, что $a^p - b^p$ делится на p^2.

8. p, q, r — различные простые числа. Известно, что pqr делится на $p + q + r$. Докажите, что число $(p - 1)(q - 1)(r - 1) + 1$ является точным квадратом.

9. Пусть p — простое вида $4n + 1$. Докажите, что $((2n)!)^2 + 1$ делится на p.

10. Решите в натуральных числах уравнение $x^3 + y^3 - 6xy + 27 = 0$.

Диофантовы уравнения

Решите уравнения, если не предлагается иное. Решите в целых числах, если не указано иное.

Линейные уравнения

1. $3n + 15m = 7$; $5x - 7y = 3$; $55x - 41y = 444$.

Метод разложения на множители

2. $x^2 - y^2 = 2011$ в $\mathbb{N}$. **3.** $x^3 + x^2 + x + 3 = 0$. **4.** $x^2 + x = y^2$.

Метод остатков

5. Докажите, что следующие уравнения не имеют решений в $\mathbb{Z}$:
(a) $x^2 + y^2 = 2011$; **(b)** $a^2 - 3b^2 = 8$; **(c)** $x^2 + y^2 + z^2 = 7^{2011}$.

6. $3^m + 7 = 2^n$. **7.** $1! + 2! + \ldots + n! = m^2$ в $\mathbb{N}$.

Метод спуска

8. $8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4$; **9.** $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.

Функция Эйлера

Определение. Функция Эйлера $\varphi(n)$ определяется как количество чисел от 1 до n, взаимно простых с n.

1. Найдите
(a) $\varphi(17)$; **(b)** $\varphi(p)$; **(c)** $\varphi(p^2)$; **(d)** $\varphi(p^\alpha)$.

2. Решите уравнения
(a) $\varphi(5^x) = 100$; **(b)** $\varphi(7^x) = 294$; **(c)** $\varphi(3^x \cdot 5^y) = 600$.

Определение. Функция $f(n)$, определенная на множестве натуральных чисел называется *мультипликативной,* если она удовлетворяет двум условиям:
(1) $f(1) = 1$; **(2)** $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ при $(m, n) = 1$.

Если $f(1) = 1$ и равенство $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ выполнено для всех пар натуральных чисел m и n, то функция $f(n)$ называется *вполне мультипликативной.*

3. Основным свойством функции Эйлера $\varphi(n)$ является ее мультипликативность. Для взаимно простых a и b рассмотрим таблицу

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & b \\ b+1 & b+2 & b+3 & \cdots & 2b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a-1)b+1 & (a-1)b+2 & (a-1)b+3 & \cdots & ab. \end{array}$$

В каких столбцах этой таблицы находятся числа, взаимно простые с числом b? Сколько в каждом из этих столбцов чисел, взаимно простых с a? Докажите мультипликативность функции Эйлера, ответив на эти вопросы.

4. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$. Докажите равенство

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)$$

(a) пользуясь мультипликативностью функции Эйлера;
(b) пользуясь формулой включений и исключений.

5. Решите уравнения
(a) $\varphi(x) = 2$; **(b)** $\varphi(x) = 8$; **(c)** $\varphi(x) = 12$; **(d)** $\varphi(x) = 14$.

6. Для каких n возможны равенства:
(a) $\varphi(n) = n - 1$ **(b)** $\varphi(2n) = 2 \cdot \varphi(n)$; **(c)** $\varphi(n^k) = n^{k-1} \cdot \varphi(n)$?

7. Решите уравнения
(a) $\varphi(x) = x/2$; **(b)** $\varphi(x) = x/3$; **(c)** $\varphi(x) = x/4$.

Определение. *Приведенной системой вычетов* по некоторому модулю m называется система чисел, взятых по одному из каждого класса, взаимно простого с модулем. (Говорят, что класс $\overline{a}$ взаимно прост с модулем m, если само число a взаимно просто с m.)

8. Пусть числа $x_1, x_2, \ldots, x_r$ образуют приведенную систему вычетов по модулю m. Для каких a и b числа $y_j = ax_j + b$ $(j = 1, \ldots, r)$ также образуют приведенную систему вычетов по модулю m?

9. По какому модулю числа 1 и 5 составляют приведенную систему вычетов?

10. Известно, что $(m, n) > 1$. Что больше, $\varphi(m \cdot n)$ или $\varphi(m) \cdot \varphi(n)$?

Входной разнобой

1. На стороне CD квадрата $ABCD$ построен правильный треугольник CDN, вершина N которого лежит вне квадрата, а на диагонали AC — правильный треугольник ACM, внутри которого лежит точка D. Докажите, что MN равно стороне квадрата.

2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD равны, а серединный перпендикуляр к стороне BC проходит через середину стороны AD. Докажите, что $AB = CD$.

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы $\angle B$ и $\angle C$ равны $120°$, а $BC + CD = AB$. Докажите, что $AC = AD$.

4. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$. Докажите, что либо эти треугольники равны, либо $\angle C + \angle C_1 = 180°$.

5. Пусть BB_1 — биссектриса неравнобедренного треугольника ABC с углом $\angle B = 48°$. Из точки O, лежащей на луче BB_1, опустили перпендикуляр OH на сторону AC. Оказалось, что $AH = HC$. Найдите угол $\angle OAC$.

6. Дана трапеция $ABCD$ такая, что $AD \parallel BC$, $AB = BC$, $AC = CD$ и $AD = BC + CD$. Найдите ее углы.

7. Внутри равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) отмечена точка D. Известно, что $\angle DAC = 30°$, $\angle DCA = 10°$ и $\angle ABC = 80°$. Найдите $\angle BDC$.

8. Точка M взята на стороне AC равностороннего треугольника ABC, а на продолжении стороны BC за вершину C отмечена точка N так, что $BM = MN$. Докажите, что $AM = CN$.

Вписанные углы, начало

На окружности с центром O даны точки A, B и C. Тогда, если A находится в той же полуплоскости относительно стороны BC, что и точка O, то $\angle BOC = 2\angle BAC$, а если точки O и A лежат по разные стороны относительно стороны BC, то $\angle BOC = 360° - 2\angle BAC$.

Следствие. Если точки A, B, C и D лежат на окружности в указанном порядке, то $\angle ABD = \angle ACD$ и $\angle ABC + \angle CDA = 180°$.

1. **Лемма об угле между хордой и касательной.** Прямая AB касается окружности ω в точке B. Так же на окружности выбраны точки C и D. Докажите, что либо $\angle BDC = \angle DCA$, либо $\angle BDC + \angle DCA = 180°$. От чего это зависит?

2. **(a)** Докажите, что ГМТ из которых данный отрезок AB виден под данным углом α есть объединение двух дуг, симметричных относительно этого отрезка и с концами в концах отрезка (так называемые «чебурашьи уши»).
(b) Выведите из этого, что четырехугольник является вписанным тогда и только тогда, когда сумма двух его противоположных углов равна 180°.
(c) Докажите, что если точки A и B лежат по одну сторону от прямой CD, то точки A, B, C и D лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $\angle CAD = \angle CBD$.
(d) Докажите, что если отрезок AB виден из точек C и D под прямым углом, то точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

3. Все углы треугольника меньше 120°. Докажите, что внутри него существует точка, из которой все стороны видны под углом 120°.

4. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через P и Q проведены прямые AB и CD, пересекающие первую окружность в точках A и C, а вторую — в точках B и D. Докажите, что $AC \parallel BD$.

5. Вершина A остроугольного треугольника ABC соединена отрезком с центром O описанной окружности. Из вершины A проведена высота AH. Докажите, что $\angle BAH = \angle OAC$.

6. На окружности даны точки A, B, M и N. Из точки M проведены хорды MA_1 и MB_1, перпендикулярные прямым NB и NA соответственно. Докажите, что $AA_1 \parallel BB_1$.

7. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E; AD —биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $AE = ED$.

Вписанные углы, продолжение

1. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Его диагонали пересекаются в точке M, а лучи AB и DC — в точке P. Докажите, что угол AMB равен полусумме дуг AB и CD. Докажите, что угол BPC равен полуразности дуг AD и BC.

2. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Третья окружность с центром P пересекает первую окружность в точках A и B, а вторую — в точках C и D. Докажите, что $\angle AQD = \angle BQC$.

3. **(a)** Продолжение биссектрисы угла B треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке M; I — центр вписанной окружности, I_b — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC. Докажите, что точки A, C, I и I_b лежат на окружности с центром M.
(b) Точка O, лежащая внутри треугольника ABC, обладает тем свойством, что прямые AO, BO и CO проходят через центры описанных окружностей треугольников BCO, ACO и ABO. Докажите, что O — центр вписанной окружности треугольника ABC.

4. Прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A движется так, что его вершины B и C скользят по сторонам данного прямого угла. Докажите, что множеством точек A является отрезок и найдите его длину.

5. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 и BB_1. Докажите, что если $\angle CAA_1 = \angle CBB_1$, то $AC = BC$.

6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что эти высоты являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$. Выведите из этого, что высоты любого треугольника пересекаются в одной точке.

7. На окружности даны точки A, B, C, D в указанном порядке. M —середина дуги AB. Обозначим точки пересечения хорд MC и MD с хордой AB через E и K. Докажите, что $KECD$ — вписанный четырехугольник.

Геометрический разнобой

1. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Обозначим середины дуг AB, BC, CD и DE, не содержащих других вершин четырехугольника, через P, Q, R и S соответственно. Докажите, что прямые PR и QS перпендикулярны.

2. Три равные окружности пересекаются в одной точке. Докажите, что треугольник с вершинами в остальных точках попарного пересечения окружностей равен треугольнику с вершинами в центрах окружностей.

3. Продолжения сторон AB и CD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а продолжения сторон BC и AD — в точке Q. Докажите, что точки пересечения биссектрис углов AQB и BPC со сторонами четырехугольника являются вершинами ромба.

4. Отрезки, соединяющие некоторую внутреннюю точку выпуклого неравностороннего n-угольника с его вершинами, делят n-угольник на n равных треугольников. При каком наименьшем n это возможно?

5. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка P так, что $\angle PBA = \angle PAB = 15°$. Докажите, что CPD — равносторонний треугольник.

6. Две окружности пересекаются в точках A и B. В точке A к обеим проведены касательные, пересекающие окружности в точках M и N. Прямые BM и BN пересекают окружности еще раз в точках P и Q (P — на прямой BM, Q — на прямой BN). Докажите, что отрезки MP и NQ равны.

Комбинаторная геометрия

1. В круге отмечена некоторая точка. Разрежьте его на две части, из которых можно сложить круг, так, чтобы эта точка оказалась его центром.

2. На плоскости нарисовано несколько прямых (не меньше двух), никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что среди частей, на которые эти прямые делят плоскость, найдется хотя бы один угол.

3. **(a)** Существуют ли два равных семиугольника, все вершины которых совпадают, но никакие стороны не совпадают?
(b) А три таких семиугольника?
(Напоминание: многоугольник на плоскости ограничен несамопересекающейся замкнутой ломаной.)

4. Каждый из трех синих квадратов пересекается с каждым из трех красных. Верно ли, что какие-то два одноцветных квадрата тоже пересекаются?

5. На прямой расположено 100 точек. Отметим середины всевозможных отрезков с концами в этих точках. Какое наименьшее число отмеченных точек может получиться?

Математические игры, часть 0

Шутки

В каждой из следующих игр ходят по очереди два игрока. Укажите, кто из них выиграет (если не спрашивается иное).

1. Имеется три кучки камней: в первой — 10, во второй — 15, в третьей — 20. За ход разрешается разбить любую кучку на две меньшие; проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

2. Двое по очереди ставят ладей на шахматную доску так, чтобы ладьи не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

3. Числа от 1 до 20 выписаны в строчку. Игроки по очереди расставляют между ними плюсы и минусы. После того, как все места заполнены, подсчитывается результат. Если он четен, то выигрывает первый игрок, если нечетен, то второй.

4. На доске написаны 10 единиц и 10 двоек. За ход разрешается стереть две любые цифры и, если они были одинаковыми, написать двойку, а если разными — единицу. Если последняя оставшаяся на доске цифра — единица, то выиграл первый игрок, если двойка — то второй.

5. На доске написаны числа 25 и 36. За ход разрешается дописать еще одно натуральное число — разность любых двух имеющихся на доске чисел, если она еще не встречалась. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

6. Дана клетчатая доска размерами **(a)** 9×10; **(b)** 10×12; **(c)** 9×11. За ход разрешается вычеркнуть любую горизонталь или любую вертикаль, если в ней к моменту хода есть хотя бы одна невычеркнутая клетка. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

7. Двое играют в двойные шахматы: все фигуры ходят как обычно, но каждый делает по два шахматных хода подряд. Докажите, что первый может как минимум сделать ничью.

8. Двое по очереди ломают шоколадку 6×8. За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

9. На квадратном поле размерами $n \times n$, (n нечетное) разграфленном на клетки размерами 1×1, играют двое. Первый игрок ставит крестик на центр поля; вслед за этим второй игрок может поставить нолик на любую из восьми клеток, окружающих крестик первого игрока. После этого первый ставит крестик на любое из полей рядом с уже занятыми, и т. д. Выигрывает тот, кто первым коснется края игрового поля (поставит свою отметку в клетку, примыкающую к краю). Кто выигрывает при правильной игре?

Математические игры, часть 1

Простая симметрия

В каждой из следующих игр ходят по очереди два игрока. Укажите, кто из них выиграет при правильной игре.

1. На доске написано число 1. Два игрока по очереди прибавляют любое число от 1 до 5 к числу на доске и записывают вместо него сумму. Выигрывает игрок, который первый запишет на доске число тридцать.

2. На столе лежат две стопки монет: в одной из них 30 монет, а в другой — 20. За ход разрешается взять любое количество монет из одной стопки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

3. У ромашки n лепестков. За ход разрешается сорвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает игрок, который не сможет сделать ход.

4. В каждой клетке доски 11×11 стоит шашка. За ход разрешается снять с доски любое количество подряд идущих шашек либо из одного вертикального, либо из одного горизонтального ряда. Выигрывает снявший последнюю шашку.

5. Вершины правильного n-угольника закрашены черной и белой краской через одну. Двое играют в следующую игру. Каждый по очереди проводит отрезок, соединяющий вершины одинакового цвета. Эти отрезки не должны иметь общих точек (даже концов) с проведенными ранее. Побеждает тот, кто сделал последний ход. **(a)** $n = 10$. **(b)** $n = 12$.

6. Дан прямоугольный параллелепипед размерами **(a)** $4\times4\times4$, **(b)** $4\times4\times3$, **(c)** $4 \times 3 \times 3$, составленный из единичных кубиков. За ход разрешается проткнуть спицей любой ряд, если в нем есть хотя бы один непроткнутый кубик. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

7. Двое играют на доске 20×14 клеток. Каждый по очереди отмечает квадрат по линиям сетки (любого возможного размера) и закрашивает его. Выигрывает тот, кто закрасит последнюю клетку. Дважды закрашивать клетки нельзя.

8. Двое игроков по очереди расставляют в каждой из 24 клеток поверхности куба $2 \times 2 \times 2$ числа $1, 2, 3, \ldots, 24$ (каждое число можно ставить один раз). Второй игрок хочет, чтобы суммы чисел в клетках каждого кольца из 8 клеток, опоясывающего куб, были одинаковыми, а первый хочет ему помешать.

9. Двое игроков по очереди выставляют на доску 65×65 по одной шашке. При этом ни в одной линии (горизонтали или вертикали) не должно быть больше двух шашек. Кто не может сделать ход — проиграл.

Математические игры, часть 2

Симметрия, однако

1. Коля и Витя играют в следующую игру на бесконечной клетчатой бумаге. Начиная с Коли, они по очереди отмечают узлы клетчатой бумаги — точки пересечения вертикальных и горизонтальных прямых. При этом каждый из них своим ходом должен отметить такой узел, что после этого все отмеченные узлы лежали в вершинах выпуклого многоугольника (начиная со второго хода Коли). Тот из играющих, кто не сможет сделать очередного хода, считается проигравшим. Кто выигрывает при правильной игре?

2. Петя и Вася играют на доске размером 7×7. Они по очереди ставят в клетки доски цифры от 1 до 7 так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не оказалось одинаковых цифр. Первым ходит Петя. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из них сможет выиграть, как бы ни играл соперник?

Игры с суммой выигрыша

3. Двое играют в следующую игру. Каждый игрок по очереди вычеркивает 9 чисел (по своему выбору) из последовательности $1, 2, \ldots, 100, 101$. После одиннадцати таких вычеркиваний останутся 2 числа. Первому игроку присуждается столько очков, какова разница между этими оставшимися числами. Докажите, что первый игрок всегда сможет набрать по крайней мере 55 очков, как бы ни играл второй. Может ли второй игрок помешать первому набрать более 55 очков?

4. Имеется шоколадка с пятью продольными и восемью поперечными углублениями, по которым её можно ломать (всего получается $9 \times 6 = 54$ дольки). Играют двое, ходят по очереди. Играющий за свой ход отламывает от шоколадки полоску ширины 1 и съедает её. Другой играющий за свой ход делает то же самое с оставшейся частью, и т. д. Тот, кто разламывает полоску ширины 2 на две полоски ширины 1, съедает одну из них, а другую съедает его партнер. Докажите, что начинающий игру может действовать таким образом, что ему достанется по крайней мере на 6 долек больше, чем второму. Может ли второй игрок помешать первому съесть больше чем на 6 долек больше?

5. По кругу стоит 101 блюдце, на каждом по конфете. Сначала Малыш выбирает натуральное $m < 101$ и сообщает его Карлсону, затем Карлсон — натуральное $k < 101$. Малыш берет конфету с любого блюдца. Отсчитав от этого блюдца k-е блюдце по часовой стрелке, Карлсон берет с него конфету. Отсчитав уже от этого блюдца m-е блюдце по часовой стрелке, Малыш берет с него конфету (если она там еще есть). Отсчитав от блюдца Малыша k-е блюдце по часовой стрелке, Карлсон берет с него конфету (если она там еще есть), и т. д. Какое наибольшее число конфет может гарантировать себе Карлсон?

Математические игры, часть 3

Преследования

1. Белая ладья преследует черного слона на доске 3×2014 клеток (они ходят по очереди по обычным правилам). Как должна играть ладья, чтобы взять слона? Первый ход делают белые.

2. В одной из вершин куба сидит заяц, но охотникам он не виден. Три охотника стреляют залпом, при этом они могут «поразить» любые три вершины куба. Если они не попадают в зайца, то до следующего залпа заяц перебегает в одну из трех соседних (по ребру) вершин куба. Укажите, как стрелять охотникам, чтобы обязательно попасть в зайца за четыре залпа.

3. На плоскости расположены 100 точек-овец и одна точка-волк. За один ход волк передвигается на расстояние не больше 1, после этого одна из овец передвигается на расстояние не больше 1, после этого снова ходит волк и т. д. При любом ли начальном расположении точек волк сможет поймать одну из овец?

4. Миша стоит в центре круглой лужайке радиуса 100 метров. Каждую минуту он делает шаг длиной 1 метр. Перед каждым шагом он объявляет направление, в котором хочет шагнуть. Катя имеет право заставить его сменить направление на противоположное. Может ли Миша действовать так, чтобы в какой-то момент обязательно выйти с лужайки, или Катя всегда сможет ему помешать?

5. Дана клетчатая полоска (шириной в одну клетку), бесконечная в обе стороны. Две клетки полоски являются ловушками, между ними — N клеток, на одной из которых сидит кузнечик. На каждом ходу мы называем натуральное число, после чего кузнечик прыгает на это число клеток влево или вправо (по своему выбору). При каких N можно называть числа так, чтобы гарантированно загнать кузнечика в одну из ловушек? (Мы всё время видим, где сидит кузнечик.)

6. Дорожки в зоопарке образуют равносторонний треугольник, в котором проведены средние линии. Из клетки сбежала обезьянка. Её ловят два сторожа. Смогут ли они поймать обезьянку, если все трое будут бегать только по дорожкам, они видят друг друга и обезьянка в три раза быстрее каждого из сторожей?

7. В центре квадрата сидит заяц, а в каждом из четырех углов по одному волку. Может ли заяц выбежать из квадрата, если волки могут бегать только по сторонам квадрата с максимальной скоростью в 1.4 раза большей, чем максимальная скорость зайца?

8. В центре квадрата сидит волк, а в вершинах — сидят собаки. Волк может бегать по внутренности квадрата с максимальной скоростью v, а собаки — только по сторонам квадрата с максимальной скоростью $1.5v$. Известно, что волк задирает собаку, а две собаки задирают волка. Всегда ли волк сможет выбежать из квадрата?

Математические игры, часть 4

Выигрышные и проигрышные позиции

В каждой из следующих игр ходят по очереди два игрока. Укажите, кто из них выиграет при правильной игре.

1. В левом нижнем углу клетчатого прямоугольника 15×22 стоит ладья. Маша и Саша по очереди передвигают её на любое количество клеток либо вправо, либо вверх. Первой ходит Маша. Выигрывает та девочка, которая поставит ладью в правый верхний угол доски.

2. Имеются две кучи камней, в первой 14 камней, во второй — 21. Маша и Саша по очереди берут сколько угодно камней с любой кучи, но только с одной. Выигрывает та девочка, которая возьмет последний камень.

3. Шахматный король стоит в левом нижнем углу шахматной доски. За один ход короля можно передвинуть на одно поле вправо, на одно поле вверх или на одно поле по диагонали «вправо-вверх». Игрок, который поставит короля в правый верхний угол доски, **(a)** выигрывает; **(b)** проигрывает.

4. Игра начинается с числа 2. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное число, меньшее его. Выигравшим считается тот, в результате хода которого получится 2014.

5. Двое по очереди выписывают на доску натуральные числа от 1 до 1000. Первым ходом первый игрок выписывает на доску число 1. Затем очередным ходом на доску можно выписать либо число $2a$, либо число $a+1$, если на доске уже написано число a. При этом запрещается выписывать числа, которые уже написаны на доске. Выигрывает тот, кто выпишет на доску число 1000.

6. Игра начинается с числа 60. За ход разрешается уменьшить имеющееся число на любой из его делителей. Проигрывает тот, кто получит ноль.

7. Имеются три кучи камней, в первой 4 камня, во второй — 5, в третьей — 7. Маша и Саша по очереди берут сколько угодно камней с любой кучи, но только с одной. Выигрывает та девочка, которая возьмет последний камень.

8. В левом нижнем ближнем углу клетчатого параллелепипеда $5 \times 6 \times 8$ стоит ладья. Маша и Саша по очереди передвигают её на любое количество клеток либо вправо, либо вверх, либо вглубь. Первой ходит Маша. Выигрывает та девочка, которая поставит ладью в правый верхний дальний угол параллелепипеда.

Математические игры, часть 5

Разнобой

1. Две компании, «Светопром» и «ООО ЕЭС», получили право освещать столицу международной шахматной мысли Нью-Васюки, представляющую собой прямоугольную сетку улиц. Они по очереди ставят на еще не освещенный перекресток прожектор, который освещает весь юго-западный угол города (т. е. все перекрестки, которые расположены не севернее и не восточнее). Премию О. Бендера получит та компания, которой на своем ходе нечего будет освещать. Начинает «Светопром». Кто выиграет при правильной игре?

2. На бесконечном листе клетчатой бумаги двое по очереди соединяют узлы соседних клеток по вертикали или горизонтали, один красным цветом, другой — синим. Нельзя обводить один отрезок дважды. Выигрывает тот, кто первым нарисует замкнутый контур своего цвета. Существует ли выигрышная стратегия **(a)** у второго игрока; **(b)** у первого игрока?

3. По кругу расставлены 8 точек. Двое по очереди соединяют их отрезками. Первый отрезок проводится произвольно, а каждый следующий начинается из конца предыдущего. Проигрывает тот, кто не может провести новый отрезок (дважды проводить один отрезок нельзя). Кто выиграет при правильной игре?

4. Двое играют на клетчатом листе бумаги 30×30. Начинающий делает разрез вдоль одной стороны квадратика от края листа, второй продолжает разрез вдоль одной стороны квадратика и т. д. Выигрывает тот, после чьего хода отвалится кусок. Кто выиграет при правильной игре?

5. На столе лежит 100 спичек. Двое ходят по очереди. За один ход можно взять $1, 2, 4, 8, \ldots$ (любую степень двойки) спичек. Проигрывает тот, кому нечего брать. Кто выиграет при правильной игре?

6. Миша, Лёва и Федя решили сыграть в следующую игру. В кучке лежат 2014 спичек. Миша и Лёва имеют право брать 1 или 2 спички, а Федя — 1, 2 или 3. При этом Миша и Лёва объединяют свои усилия против Феди, а Федя имеет право выбрать очередь своего хода — первый, второй или третий. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку. Может ли Федя выбрать себе такую очередь, что при правильной игре выиграет именно он?

7. Двое играющих по очереди переводят часовую стрелку на 2 или 3 часа вперед. Вначале часовая стрелка указывает на 12, выигравшим объявляется тот, после чьего хода она укажет на 6. Кто выиграет при правильной игре? (До того, как остановиться на цифре 6, стрелка может сделать сколько угодно оборотов.)

8. В одной кучке 18 конфет. В другой — 23. Двое по очереди съедают одну из куч, а другую делят на две кучи. Кто не может поделить (в куче осталась одна конфета), проигрывает. Есть ли у начинающего выигрышная стратегия?

Взвешивания

1. Лиса Алиса и Кот Базилио — фальшивомонетчики. Базилио делает монеты тяжелее настоящих, а Алиса — легче. У Буратино есть 15 одинаковых по внешнему виду монет, но какая-то одна — фальшивая. Как двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь Буратино может определить, кто сделал фальшивую монету — Кот Базилио или Лиса Алиса?

2. Среди 201 монеты 50 фальшивых. Каждая фальшивая отличается от настоящей по весу на 1 грамм (в ту или в другую сторону). Имеются чашечные весы со стрелкой, показывающей разность масс одной и другой чашки. Как за одно взвешивание узнать, является ли заранее выбранная монета настоящей?

3. Есть 100 кучек по 100 монет в каждой, ровно в одной кучке все монеты фальшивые (на грамм легче настоящих), а в остальных все настоящие. За какое наименьшее количество взвешиваний на чашечных весах со стрелкой, показывающей разницу между массами монет на чашках, определить кучку с фальшивыми монетами?

4. Есть 6 гирек массами 1 г, 2 г, ..., 6 г и с такими же наклейками. Как за 2 взвешивания на чашечных весах убедиться, что наклейки наклеены верно?

5. Есть 2008 монет, среди которых не более 2 фальшивых (отличных по весу от настоящих и равных между собой). Как за 3 взвешивания определить, есть ли фальшивые монеты, и если есть, то легче они или тяжелее настоящих (количество определять не нужно)?

6. **(a)** Есть 27 внешне неотличимых монет. Известно, что одна из них фальшивая (легче настоящей). За какое наименьшее количество взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти фальшивую монету?
(b) Есть золотые и серебряные слитки, всего 81 штука, среди которых есть один фальшивый, причем золото подделывают более легкой латунью, а серебро более тяжелым свинцом. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти фальшивый слиток?
(c) Есть 39 внешне неотличимых монет, одна из которых фальшивая (отличается по весу от настоящей). За какое наименьшее количество взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти фальшивую монету и определить, легче она или тяжелее настоящей?
(d) Есть 40 внешне неотличимых монет, одна из которых фальшивая (отличается по весу от настоящей). За какое наименьшее количество взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти фальшивую монету, не обязательно определяя легче она или тяжелее настоящей?
(e) Обобщите предыдущие пункты на случай n монет/слитков.

7. На суд в качестве вещественного доказательства было представлено 14 монет.

Суду известно, что фальшивые монеты легче настоящих. Эксперт обнаружил, что монеты с 1-й по 7-ю фальшивые, а с 8-й по 14-ю настоящие. Как за 3 взвешивания эксперт сможет убедить суд в своей правоте?

8. Есть 27 монет достоинством 1, 2, 5 рублей, по 9 штук каждого вида. Одна из них фальшивая (легче настоящей). Настоящие монеты весят пропорционально своему достоинству (1, 2, 5 грамм). За какое наименьшее число взвешиваний можно наверняка определить фальшивую монету, если нельзя класть на весы заведомо настоящие монеты?

9. Есть 9 фальшивых монет, среди которых есть 1 фальшивая монета (легче настоящей) и трое чашечных весов, одни из которых неисправны и показывают случайный результат. Как за 4 взвешивания найти фальшивую монету?

Алгоритмы и информационные оценки

1. **(a)** Дана колода из 52 карт. Ассистент загадал карту. Фокусник может разложить все карты на 4 стопки и спросить, в какой стопке находится карта. Сколько вопросов нужно задать фокуснику, чтобы наверняка угадать загаданную карту?
(b) А если загадано две карты и ассистент отвечает на вопрос, в каких кучках лежат загаданные карты?

2. На плоскости расположен квадрат, и невидимыми чернилами нанесена точка P. Человек в специальных очках видит точку. Если провести прямую, то он отвечает на вопрос, по какую сторону от неё лежит P (если P лежит на прямой, то он говорит, что P лежит на прямой). Какое наименьшее число таких вопросов необходимо задать, чтобы узнать, лежит ли точка P внутри квадрата?

3. **(a)** Петя задумал три натуральных числа a, b, c, не превосходящих 100. За один вопрос Вася может узнать у Пети значение выражения $ax + by + cz$ для любых натуральных чисел x, y, z. За какое наименьшее число вопросов Вася может узнать задуманные числа?
(b) А если Петя задумал произвольные натуральные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_n, а Вася узнает значение $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$ для любых натуральных b_1, b_2, $\ldots$, b_n?

4. **(a)** В гостиницу приехал путешественник. У него вместо денег нашлась лишь серебряная цепочка из 7 звеньев. Хозяин требует платить по одному звену в день без задержек, готов давать сдачу ранее полученными кусками цепочки, но плату вперед брать отказывается. Какое наименьшее число звеньев придется распилить, чтобы можно было расплачиваться все 7 дней?
(b) А если цепочка из 23 звеньев и 23 дня?
(c) А если цепочка замкнутая, состоит из 79 звеньев и нужно расплачиваться 79 дней?
(d) Решите пункты 4b, 4c для случая n звеньев и n дней.

5. **(a)** Есть 4 золотые и 2 серебряные монеты, среди которых по одной фальшивой монете, которые легче настоящей (фальшивые монеты весят одинаково, настоящие тоже). За сколько взвешиваний на чашечных весах можно наверняка найти обе фальшивые монеты?
(b) А если золотых монет 13 (а серебряных 2)?
(c) А если золотых монет n?

Часть III

Группа «9» (Носороги)

Письменная олимпиада, 9 класс

1. Найдите наименьшее число x, удовлетворяющее уравнению $x^2 - [x]^2 = 2012$. ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x.)

2. На столе лежит стопка из 300 карточек, в которой содержится ровно по 100 белых, черных и красных карточек. Для каждой белой карточки подсчитаем количество черных, лежащих ниже её, для каждой черной — количество красных, лежащих ниже её, для каждой красной — количество белых, лежащих ниже её. Найдите наибольшее возможное значение суммы 300 получившихся чисел.

3. На сторонах AB и AC треугольника ABC внешним образом построены квадраты $ABKL$ и $ACMN$. Докажите, что перпендикуляр к отрезку LN, проходящий через точку A, делит сторону BC пополам.

4. Докажите, что найдется бесконечное число натуральных чисел, не представимых в виде $p + n^2$, где p — простое, n — натуральное число.

5. В летней школе состоялся шахматный турнир в один круг. Исход партии называется *неожиданным*, если в этой партии игрок, набравший в турнире меньшее количество очков, обыграл игрока, набравшего большее количество очков. Может ли доля партий с *неожиданным* исходом быть больше 75%? Напомним, что в шахматах в случае победы игрок получает одно очко, в случае ничьи — пол-очка, в случае поражения — ноль очков.

Квадратный трёхчлен

Теорема Виета. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$. Тогда $x_1 \cdot x_2 = q$ и $x_1 + x_2 = -p$.

0. Сформулируйте и докажите обратное к теореме Виета утверждение.

1. Даны вещественные числа x_1, x_2, y_1, y_2 такие, что $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ и $x_1x_2 = y_1y_2$. Докажите, что наборы $\{x_1, x_2\}$ и $\{y_1, y_2\}$ совпадают.

2. При каком значении параметра m сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 - (m+1)x + m - 1 = 0$$

является наименьшей?

3. Для многочленов $f(x) = x^2 + ax + b$ и $g(y) = y^2 + py + q$ с корнями x_1, x_2 и y_1, y_2 соответственно, выразите через a, b, p, q их *результант*

$$R(f, g) = (x_1 - y_1)(x_1 - y_2)(x_2 - y_1)(x_2 - y_2).$$

4. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 - 3x - 5 = 0$. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа:
(a) $x_1 + \frac{1}{x_1}$ и $x_2 + \frac{1}{x_2}$; **(b)** $x_1 + \frac{1}{x_2}$ и $x_2 + \frac{1}{x_1}$.

Ещё задачи

5. Один из двух приведенных квадратных трехчленов имеет два корня меньших тысячи, другой — два корня больших тысячи. Может ли сумма этих трехчленов иметь один корень меньший тысячи, а другой — больший тысячи?

6. Известно, что $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ — квадратные трехчлены. Может ли уравнение $f(g(h(x))) = 0$ иметь корни 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8?

7. У квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ коэффициенты p и q увеличили на единицу. Эту операцию повторили девять раз. Могло ли оказаться, что у каждого из десяти полученных уравнений корни — целые числа?

8. Есть две параболы $y = x^2 + x - 41$ и $x = y^2 + y - 40$. Докажите, что точки их пересечения лежат на одной окружности.

9. Рассмотрим графики функций $y = x^2 + px + q$, которые пересекают оси координат в трех различных точках. Докажите, что все окружности, описанные около треугольников с вершинами в этих точках, имеют общую точку.

10. Квадратный трехчлен $f(x)$ разрешается заменить на один из трехчленов

$$x^2 \cdot f\left(\frac{1}{x}+1\right) \quad \text{или} \quad (x-1)^2 \cdot f\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

Можно ли с помощью таких операций из квадратного трехчлена x^2+4x+3 получить трехчлен $x^2+10x+9$?

11. Трёхчлен ax^2+bx+c при всех целых x является точной четвертой степенью. Докажите, что тогда $a=b=0$.

Ещё квадратный трёхчлен

1. Пусть у трехчлена ax^2+bx+c с целыми a, b, c есть два корня, один из которых рациональный.

(a) Верно ли, что второй корень тоже рациональный?

(b) Пусть первый корень целый. Верно ли, что второй корень целый?

(c) Пусть первый корень целый и $a=-1$. Верно ли, что второй корень целый?

(d) Пусть $a=1$, а про первый корень известна только рациональность. Докажите, что всё равно оба корня целые.

Замечание. Квадратный трехчлен (с ненулевым коэффициентом при x^2) принимает каждое своё значение не более двух раз.

2. Пусть $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ — квадратные трехчлены. Докажите, что у уравнения $f(g(h(x)))=0$ не более восьми корней.

3. Пусть $f(x)$ — квадратный трехчлен, не являющийся константой, который в целых x принимает только значения вида k^4, где k целое.

(a) Докажите, что максимум $f(x)$ при $x\in[0;2n]$ не меньше n^4.

(b) Докажите, что при всех достаточно больших n выполнено $f(2n)\geqslant n^4$.

(c) Докажите, что таких трехчленов $f(x)$ не бывает.

4. Пусть $f(x)$ — квадратный трехчлен, не являющийся константой, который может принимать в целых точках только значения $\pm 2^k3^l5^m$, где k, l, m натуральные. Докажите, что таких трехчленов не бывает.

Неравенство о средних

Неравенство о средних. Пусть x_1, x_2, …, x_n — положительные числа. Тогда выполнено неравенство

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

1. **(a)** Пусть $0 < x_1 < y_1 \leqslant y_2 < x_2$, причем $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$. Докажите, что $x_1 \cdot x_2 < y_1 \cdot y_2$

(b) Докажите неравенство о средних.

(c) Когда в неравенстве о средних достигается равенство?

2. Произведение двух положительных чисел больше их суммы. Докажите, что эта сумма больше четырех.

3. Докажите, что если $a < 1$, $b < 1$ и $a + b \geqslant 0.5$, то $(1 - a)(1 - b) \leqslant 9/16$.

4. Пусть $a, b, c \geqslant 0$. Докажите, что $(a + b)(a + c)(b + c) \geqslant 8abc$.

5. Докажите, что при $x \geqslant 0$ имеет место неравенство $3x^3 - 6x^2 + 4 \geqslant 0$.

6. Докажите, что для любых положительных чисел x и y справедливо неравенство $\dfrac{x}{x^4 + y^2} + \dfrac{y}{y^4 + x^2} \leqslant \dfrac{1}{xy}$.

7. Рассматриваются такие наборы действительных чисел x_1, x_2, x_3, …, x_{20}, заключенных между 0 и 1, что $x_1x_2x_3 \ldots x_{20} = (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3) \ldots (1-x_{20})$. Найдите среди этих наборов такой набор, для которого значение $x_1x_2x_3 \ldots x_{20}$ максимально.

8. На квадратный лист бумаги со стороной a посадили несколько клякс, площадь каждой из которых не больше 1. Оказалось, что каждая прямая, параллельная сторонам листа, пересекает не более одной кляксы. Докажите, что суммарная площадь клякс не больше a.

Теория чисел

1. Докажите, что

(a) $27 \mid 10^n + 18n - 1$; **(b)** $17 \mid 2^{5n+3} + 5^n 3^{n+2}$; **(c)** $6 \mid n^3 + 5n$;
(d) $7 \mid 6^{2n+1} + 1$; **(e)** $3^{n+1} \mid 2^{3^n} + 1$; **(f)** $2^n - 3 \mid (2^n - 1)^n - 3$;
(g) $3^{n-2} \mid \underbrace{11\ldots1}_{3^n}$;

2. Докажите, что $F_n \mid F_m \quad \Leftrightarrow \quad n \mid m$.

3. **Малая теорема Ферма.** Если p — простое, то $p \mid a^p - a$.

4. Пусть $a < b$ — натуральные числа, $(a, b) = 1$. Докажите, что $b \mid C_b^a$.

5. При каких n все коэффициенты при раскрытии скобок в $(a + b)^n$ нечетны?

6. Докажите, что $(\underbrace{11\ldots1}_{n}, \underbrace{11\ldots1}_{m}) = \underbrace{11\ldots1}_{(n,m)}$.

7. Найдите $(a^n - 1, a^m - 1)$.

Теория чисел

1. Найдите свободный член многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, если известно, что его модуль меньше 700 и $P(200) = P(7) = 2007$.

2. Существуют ли 14 натуральных чисел таких, что при увеличении каждого из них на один произведение увеличится в 2008 раз?

3. Назовём число n *хорошим,* если каждое из чисел n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ делится на сумму своих цифр (например, 60398). Если хорошее число заканчивается на цифру 8, будет ли предпоследняя цифра равна 9?

4. Пусть $p > 5$ — простое число. Докажите, что число, состоящее из $(p-1)$-й единицы — $11\ldots1$ — делится на p.

5. Докажите бесконечность количества хороших чисел.

6. Пусть число N — *самодельное*, если оно делится на сумму любых подряд идущих своих цифр. Докажите, что число самодельных чисел — конечно.

Серия 1, о прямоугольном треугольнике

В треугольнике ABC с прямым углом $\angle C$ построены: CH — высота, O, O_1, O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABC, ACH и CBH соответственно, r, r_1, r_2 — их радиусы. Прямая O_1O_2 пересекает стороны AC и BC в точках U и V соответственно. Прямые CO_1 и CO_2 пересекают сторону AB в точках P и Q соответственно. Точка T — основание перпендикуляра из точки O на AB. Докажите следующие утверждения.

1. Треугольники ACQ и BCP равнобедренные.

2. Точка O — ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника CO_1O_2.

3. Треугольники ACH и BCH подобны ABC с коэффициентами k_1 и k_2 такими, что $k_1^2 + k_2^2 = 1$.

4. Для радиусов вписанных окружностей выполнено равенство $r^2 = r_1^2 + r_2^2$.

5. И еще одно волшебное наблюдение: $r + r_1 + r_2 = CH$.

6. Точки A, O_1, O_2, B лежат на одной окружности.

7. Точки A, P, O, C, чудесным образом, тоже лежат на одной окружности.

8. Описанные окружности треугольников ACO_1 и BCO_2 касаются в точке C с общей касательной OC.

9. Внезапно, $O_1O_2 = CO$.

10. А еще $CU = CV = CH$.

11. Неожиданно $PO_2 \parallel AO$ и $QO_1 \parallel BO$.

12. Треугольники O_1O_2H и ABC подобны.

13. Как это ни странно, $\angle O_1TO_2 = 90^\circ$.

14. А вот и еще две параллельности: $TO_1 \parallel BC$, $TO_2 \parallel AC$.

15. Аж пять отрезков равны: $O_1T = O_2T = OT = PT = QT$.

Серия 2, про геометрические места точек

1. На плоскости даны две точки A и B. Кроме того, дано число $a > 0$. Найдите геометрическое место точек X таких, что $AX^2 - BX^2 = a$.

2. На плоскости дан треугольник ABC. Рассмотрим геометрическое место точек плоскости X, для которых $AX/BX = AC/BC$.
(a) Укажите четыре различных точки на плоскости, принадлежащих этому ГМТ.
(b) Найдите это геометрическое место точек.

3. Дана окружность ω и точки A и B на ней. Точка C движется по окружности ω. Какую траекторию описывает
(a) ортоцентр H треугольника ABC?
(b) точка пересечения медиан треугольника ABC?
(c) центр вписанной окружности I?
(d) центр вневписанной окружности I_c?
(e) центр вневписанной окружности I_a?

4. Даны две равные окружности, пересекающиеся в точках A и B. Через точку A проводится прямая ℓ, пересекающая вторично первую окружность в точке X, а вторую в точке Y. Найдите геометрическое место середин отрезков XY, когда прямая ℓ меняется.

5. Дан треугольник ABC. Найдите геометрическое место середин отрезков с концами на контуре треугольника ABC.

6. Дан прямой угол с вершиной O. Найдите геометрическое место середин отрезков единичной длины с концами на сторонах угла.

7. На плоскости дан равносторонний треугольник ABC.
(a) Докажите, то если точка P лежит внутри треугольника, то из отрезков PA, PB и PC можно составить треугольник.
(b) Найдите геометрическое место таких точек P внутри ABC, что треугольник, составленный из PA, PB и PC, является остроугольным.

Серия 3, про радикальную ось и не только

Определение. Величина $OA^2 - r^2$ называется *степенью точки* A относительно окружности с радиусом r и центром O.

1. **(a)** Докажите, что геометрическое место точек с равными степенями относительно двух неконцентрических окружностей есть прямая, перпендикулярная их линии центров. Эта прямая называется *радикальной осью* двух окружностей.
(b) Докажите, что радикальные оси трех окружностей, центры которых не лежат на одной прямой, пересекаются в одной точке. Эта точка называется *радикальным центром* трёх окружностей.

2. **(a)** Докажите, что радикальная ось делит отрезок общей касательной двух окружностей пополам.
(b) В угол вписаны две окружности. Одна из них касается сторон угла в точках A и B, а другая — в точках C и D соответственно. Докажите, что прямая AD высекает на этих окружностях равные хорды.

3. На стороне BC треугольника ABC взята точка A'. Серединный перпендикуляр к отрезку $A'B$ пересекает сторону AB в точке M, а серединный перпендикуляр к отрезку $A'C$ пересекает сторону AC в точке N. Докажите, что точка, симметричная точке A' относительно прямой MN, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

4. Через вершину B остроугольного треугольника ABC проведено две окружности, которые касаются стороны AC в точках A и C и пересекаются вторично в точке M.
(a) Докажите, что M лежите на медиане треугольника, выходящей из вершины B.
(b) Докажите, что A, C, M и ортоцентр треугольника H лежат на одной окружности.

5. **(a)** Докажите, что точка, симметричная ортоцентру H треугольника ABC относительно середины стороны лежит на описанной окружности треугольника ABC.
(b) Докажите, что A, C, H и проекция H на медиану треугольника, выходящую из вершины B, лежат на одной окружности.

6. Внутри выпуклого многоугольника расположено несколько попарно непересекающихся кругов различных радиусов. Докажите, что многоугольник можно разрезать на маленькие многоугольники так, чтобы все они были выпуклыми и в каждом из них содержался ровно один из данных кругов.

7. **(a)** Окружность s_1 касается окружности s внутренним образом в точке N. Хорда AB окружности s касается окружности s_1 в точке M. Докажите, что

MN делит дугу AB, не содержащую точку N, пополам.

(b) Окружности s_1 и s_2 касаются окружности s внутренним образом. Хорда AB окружности s является общей внешней касательной окружностей s_1 и s_2. Докажите, что их радикальная ось проходит через середину дуги AB.

Комбинаторная геометрия

1. На плоскости нарисовано несколько многоугольников, каждые два из которых имеют общую точку. Докажите, что найдется прямая, пересекающая все эти многоугольники.
2. Существует ли такой выпуклый (то есть со всеми углами меньше 180°) пятиугольник $ABCDE$, что все углы ABD, BCE, CDA, DEB и EAC — тупые?
3. У правильного 2011-угольника отмечены 64 вершины. Докажите, что существует трапеция с вершинами в отмеченных точках.
4. Каждый из трех синих квадратов пересекается с каждым из трех красных. Верно ли, что какие-то два одноцветных квадрата тоже пересекаются?
5. Единичный квадрат разбит на конечное число квадратиков (размеры которых могут различаться). Может ли сумма периметров квадратиков, пересекающихся с главной диагональю, быть больше 1993?

И немного про выпуклость...

Определение. Фигура называется *выпуклой*, если вместе с любыми двумя своими точками A и B содержит весь отрезок AB.

6. Докажите, что у выпуклого многоугольника все углы меньше 180°.
7. Докажите, что прямая, содержащая сторону выпуклого многоугольника, не пересекает этот многоугольник по внутренним точкам. Докажите, что выпуклый многоугольник является пересечением некоторого количества полуплоскостей.
8. На плоскости дано пять точек, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что четыре из этих точек расположены в вершинах выпуклого четырехугольника.
9. *Теорема Хана – Банаха.* Докажите, что любые два выпуклых непересекающихся многоугольника можно разделить прямой.

Раскраски

1. Доска 8×8 разрезана на фигурки домино 1×2. Докажите, что количество горизонтальных и вертикальных фигурок четно. Фигурки разрешается поворачивать и переворачивать.

2. Куб размером $3 \times 3 \times 3$ состоит из 27 единичных кубиков. Можно ли побывать в каждом кубике по одному разу, двигаясь следующим образом: из кубика можно пройти в любой кубик, имеющий с ним общую грань, причем запрещено ходить два раза подряд в одном направлении?

3. Каждая сторона равностороннего треугольника разбита на n равных частей. Через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. В результате треугольник разбит на n^2 треугольничков. Назовём цепочкой последовательность треугольничков, в которой ни один не появляется дважды и каждый последующий имеет общую сторону с предыдущим. Каково наибольшее возможное количество треугольничков в цепочке?

4. Концы N хорд разделили окружность на $2N$ дуг единичной длины. Известно, что каждая из хорд делит окружность на две дуги четной длины. Докажите, что число N четно.

5. Можно ли доску размером **(a)** 10×10 **(b)** 12×12 клеток разрезать на фигурки  из четырех клеток? Фигурки разрешается поворачивать и переворачивать.

6. Для каких n доску размера $n \times n$ можно разбить на прямоугольники 1×4? Фигурки разрешается поворачивать и переворачивать.

7. Из 54 одинаковых единичных картонных квадратов сделали незамкнутую цепочку, соединив их *шарнирно* вершинами. Любой квадрат (кроме крайних) соединен с соседями двумя противоположными вершинами. Докажите, что этой цепочкой квадратов нельзя полностью закрыть поверхность куба $3 \times 3 \times 3$.

8. Каждая сторона равностороннего треугольника разделена на 6 равных частей, через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам, делящие исходный треугольник на 36 маленьких треугольничков. В каждой из вершин этих треугольничков сидит по жуку. Они одновременно начинают двигаться по линиям деления с равными скоростями. Когда жук попадает в вершину треугольничка, он поворачивает на 60 или 120 градусов. Докажите, что через некоторое время какие-то два жука окажутся в одной вершине маленького треугольничка.

Инварианты

1. На клетке a2 стоит белый конь, на клетке g8 черный конь. Ходят по очереди. На одном из ходов один из коней был съеден другим. Какой конь остался на доске?

2. Марья-искусница умеет делать с куском ткани следующую операцию: разрезать кусок по прямой линии на две части, перевернуть одну из частей на другую сторону и сшить два куска в один по бывшему разрезу. У неё есть квадратный шелковый платок. Может ли Марья-искусница получить из него правильный треугольник?

3. У Буратино 100 круглых монет, 101 квадратная и 102 треугольная. В обменном пункте, организованном котом Базилио, можно обменять две монеты разной формы на монету третьей формы. После серии обменов у Буратино осталась одна монета. Какая?

4. В таблице расставлены плюсы и один минус, как показано на рисунке. За одну операцию разрешается поменять знаки (плюсы на минусы и наоборот) в любой горизонтали, вертикали или диагонали (всего диагоналей 22, угловая клетка — это тоже диагональ). Докажите, что нельзя получить все плюсы.

+	−	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+

5. На доске написано число, состоящее из 100 цифр 7. Каждую минуту последняя цифра числа запоминается, затем стирается и умноженная на 5 прибавляется к тому числу, что осталось на доске после стирания. Может ли на доске оказаться число 99?

6. Есть три кучки камней: в первой 51 камень, во второй 49, а в третьей 5. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного количества камней, на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

7. В трех левых нижних клетках доски 8×8 стоят ладьи. За один ход разрешается передвигать ладью по обычным правилам так, чтобы после каждого хода каждая из ладей была бы под защитой какой-нибудь другой ладьи. Может ли после некоторого хода каждая ладья оказаться в в клетке, симметричной исходной относительно диагонали `a8`–`h1`?

a8						1	2
							3
1							
2	3						h1

8. На плоскости внутри квадрата 1×1 сидят n зайцев. Если $AA'BB'$ прямоугольник, то за один ход два зайца могут прыгнуть из точек A и B в точки A' и B'. Докажите, что никакие два зайца не удалятся друг от друга на расстояние, большее **(a)** n **(b)** $2\sqrt{n}$.

Полуинварианты и процессы

1. В клетках прямоугольной таблицы записаны числа -1 и $+1$. Если в строке/столбце сумма чисел отрицательная, разрешается менять знак у всех чисел в строке/столбце.

(a) Можно ли из первой таблицы получить вторую?

-1	$+1$	$+1$	-1	-1
$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$
$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$
-1	-1	$+1$	-1	-1
-1	-1	-1	$+1$	-1

-1	-1	-1	$+1$	$+1$
-1	$+1$	-1	-1	$+1$
-1	$+1$	-1	-1	$+1$
$+1$	-1	$+1$	-1	-1
$+1$	-1	-1	$+1$	-1

(b) Докажите, что какая бы изначально ни была расстановка чисел, можно сделать лишь конечное число таких операций.

(c) То же самое, но числа в таблице произвольные действительные.

(d) Дана прямоугольная таблица, в клетках которой записаны действительные числа. Разрешается менять знак у всех чисел в любом квадратике 3×3. Докажите, что можно сделать так, чтобы в любом квадратике 3×3 сумма чисел была неотрицательная.

(e) Всегда ли можно сделать так, чтобы сумма всех чисел стала неотрицательна?

2. Если на доске написан квадратный трехчлен $x^2 + bx + c$, Петя может выбрать произвольное d и написать новый трехчлен $x^2 + (b + 2d)x + (c + bd)$. Может ли на доске после нескольких таких операций появиться трехчлен $x^2 - 2000x + 1000000$, если изначальный трехчлен имел свободный член -1?

3. В квадрате 10×10 покрашено 9 клеток. Каждый день закрашивают те клетки, у которых не менее двух соседних по стороне уже покрашены. Докажите, что полностью квадрат закрашен никогда не будет.

Доказать, что процесс остановится

4. Изначально в связном графе несколько вершин покрашены в черный цвет, а несколько в белый. За одну операцию можно перекрасить какую-нибудь вершину в тот цвет, в который покрашена бо́льшая часть её соседей. Докажите, что когда-нибудь перекрашивать будет нечего.

5. Дан невыпуклый многоугольник $A_1A_2\dots A_n$. Если несмежные вершины A_i и A_j многоугольника таковы, что он лежит целиком по одну сторону от прямой A_iA_j, то можно взять одну из двух ломаных, на которые точки A_i и A_j его разбивают, и отразить симметрично центра отрезка A_iA_j. Докажите, что рано или поздно многоугольник станет выпуклым.

6. В колоде часть карт лежит «рубашкой вниз». Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат «рубашкой вниз», переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет её в то же место колоды. Докажите, что в конце концов все карты лягут «рубашкой вверх», как бы ни действовал Петя.

Придумать процесс

7. В парламенте у каждого депутата не более трех врагов (если A враг B, то B враг A). Докажите, что депутаты могут разбиться на две партии так, чтобы внутри каждой партии у каждого депутата было бы не более одного врага.

8. На окружности расставлено несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Докажите, что можно разделить окружность на три дуги так, что суммы чисел на соседних дугах будут отличаться не больше, чем на 1. (Если на дуге нет чисел, то сумма на ней считается равной нулю.)

Примеры

1. В связном графе $2n$ вершин, все вершины имеют степень 3. Обязательно ли вершины графа можно разбить на n пар смежных?

2. Можно ли найти 5 различных натуральных чисел таких, что сумма любых 4 из них — точный квадрат?

3. Существует ли граф с 10 вершинами такой, что все вершины имеют степень 3 и что из любой вершины можно добраться до любой, пройдя не более, чем по двум ребрам?

4. Разрежьте правильный десятиугольник на 10 ромбов.

5. Вася ставит на плоскости точки: сначала первую, потом вторую и так далее. Может ли в каждый момент времени множество поставленных им точек иметь ось симметрии, если никакие три точки не ставятся на одну прямую?

6. Можно ли разрезать круг на несколько равных частей так, чтобы хотя бы одна из них не содержала центр? Граница части ей принадлежит.

7. Какое наибольшее число диагоналей отдельных клеточек можно провести внутри клетчатого квадрата 5×5 так, чтобы диагонали попарно не имели общих точек (даже концов)?

Взгляд в бесконечность, часть 1

1. **(a)** Докажите, что существует сколь угодно много последовательных составных чисел, идущих подряд.
   (b) А существует ли бесконечно много последовательных составных чисел?

2. В стране Фибоначчи есть купюры достоинством 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 лир. У Леонардо есть купюра 55 лир. Каждый день он может пойти в банк и обменять любую имеющуюся у него купюру на любое количество купюр меньшего достоинства. Кроме того, каждый день Леонардо должен тратить 1 лиру на еду. Докажите, что Леонардо сможет существовать сколь угодно долго, но не бесконечно долго.

3. Известно, что человечество бессмертно, а каждый человек смертен. Число людей в каждом поколении конечно. Докажите, что найдется бесконечная мужская цепочка, начинающаяся с Адама.

4. Две шайки гангстеров охотятся друг за другом. Каждый гангстер охотится ровно за одним противником, и за каждым гангстером охотится не более одного противника. Главарь одной из шаек обнаружил, что не за всеми противниками охотятся. Докажите, что обе шайки бесконечны.

5. В отеле ∞ бесконечно много номеров, занумерованных натуральными числами. Сейчас в каждом номере живет по гостю.
   (a) Приехал еще один гость. Можно ли так переселить гостей, чтобы все поместились?
   (b) У каждого гостя приехало ровно по одному другу. Можно ли переселить гостей теперь?
   (c) Приехало еще какое-то множество посетителей. И оказалось, что каждый из приехавших знает конечное число постояльцев, причем множества знакомых постояльцев ни у каких двоих из новых посетителей не совпадает. Обязательно ли удастся вновь расселить?
   (d) Как изменится ответ на вопрос пункта 5c, если сказать, что у новых приехавших не обязательно конечное число знакомых постояльцев?

6. Натуральные числа раскрасили в два цвета. Обязательно ли существует одноцветная бесконечная арифметическая прогрессия?

7. Хан и Банах играют в игру с бесконечным количеством ходов. Они по очереди выписывают цифры в последовательность. Причем Хан пишет любое число цифр, а Банах только одну. Хан хочет, чтобы последовательность получилась периодической, а Банах пытается ему помешать. Кто из них преуспеет?

Взгляд в бесконечность, часть 2

1. **(a)** За дядькой Черномором выстроилось чередой бесконечное число богатырей различного роста, причем рост каждого составляет натуральное число сантиметров. Доказать, что он может приказать части из них выйти из строя так, чтобы в строю осталось бесконечное число богатырей, стоящих в порядке возрастания.

(b) Имеется таблица из трех строк и бесконечного числа столбцов, занумерованных натуральными числами. В каждой клетке таблицы стоит натуральное число. Доказать, что можно так выбрать последовательность столбцов в таблице, что в каждой из строк число, стоящее в i-м столбце последовательности будет не меньше числа, стоящего в $(i+1)$-м столбце последовательности.

(c) То же условие, что в пункте 1a, только на этот раз рост богатырей не обязательно выражается натуральным числом сантиметров. Доказать, что Черномор может приказать части из них выйти из строя так, чтобы в строю осталось бесконечное число богатырей, стоящих в порядке возрастания или убывания.

2. Допустим, что любую конечную карту можно правильным образом раскрасить в 4 цвета. Докажите, что тогда и бесконечную карту тоже можно раскрасить 4 цвета.

3. В 6 коробках, выложенных в ряд, лежит по одной монете. За один ход можно сделать одну из двух операций:
(1) Убрать одну монету из коробки i (при $i < 6$) и положить 2 монеты в коробку $i+1$;
(2) Убрать одну монету из коробки i (при $i < 5$) и поменять содержимое коробок $i+1$ и $i+2$ местами.

(a) Докажите, что нельзя получить суммарно сколь угодно много монет.

(b) А можно ли получить в одной из коробок не менее 2014! монет?

Игры

0. Коля и Витя играют в следующую игру. На столе лежит куча из 31 камня. Мальчики делают ходы поочередно, а начинает Коля. Делая ход, играющий делит одну из кучек, в которых больше одного камня, на две меньшие кучки. Выигрывает тот, кто после своего хода оставляет кучки по одному камню в каждой. Сможет ли Коля сделать так, чтобы выиграть при любой игре Вити?

1. Коля и Витя играют в следующую игру. На столе лежит куча из 31 камня. Мальчики делают ходы поочередно, а начинает Коля. Делая ход, играющий делит каждую кучку, в которой больше одного камня, на две меньшие кучки. Выигрывает тот, кто после своего хода оставляет кучки по одному камню в каждой. Сможет ли Коля сделать так, чтобы выиграть при любой игре Вити?

2. Двое играют на доске 25×62014 клеток. Каждый по очереди отмечает квадрат по линиям сетки (любого возможного размера) и закрашивает его. Выигрывает тот, кто закрасит последнюю клетку. Дважды закрашивать клетки нельзя. Кто выиграет при правильной игре и как надо играть?

3. Капитан Врунгель в своей каюте разложил перетасованную колоду из 52 карт по кругу, оставив одно место свободным. Матрос Фукс с палубы, не отходя от штурвала и не зная начальной раскладки, называет карту. Если эта карта лежит рядом со свободным местом, Врунгель ее туда передвигает, не сообщая Фуксу. Иначе ничего не происходит. Потом Фукс называет еще одну карту, и так сколько угодно раз, пока сам не скажет «стоп». Может ли Фукс добиться того, чтобы после «стопа» каждая карта наверняка оказалась не там, где была вначале?

4. Лежит кучка в 146 миллионов спичек. Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. За один ход играющий может взять из кучки спички в количестве p^n, где p — простое число, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ (например, первый берёт 25 спичек, второй — 8, первый — 1, второй — 5, первый — 49 и т. д.). Выигрывает тот, кто берёт последнюю спичку. Кто выигрывает при правильной игре?

5. На горе 1001 ступенька, на некоторых лежат камни, по одному на ступеньке. Сизиф берёт любой камень и переносит его на ближайшую сверху свободную ступеньку (то есть если следующая ступенька свободна, то на неё, а если занята, то на несколько ступенек вверх до первой свободной). После этого Аид скатывает на одну ступеньку вниз один из камней, у которых предыдущая ступенька свободна. Камней 500, и первоначально они лежали на нижних 500 ступеньках. Сизиф и Аид действуют по очереди, начинает Сизиф. Его цель — положить камень на верхнюю ступеньку. Может ли Аид ему помешать?

6. На столе лежат три кучки спичек. В первой кучке находится 100 спичек, во второй — 200, а в третьей — 300. Двое играют в такую игру. Ходят по очереди, за один ход игрок должен убрать одну из кучек, а любую из оставшихся разделить на две непустые части. Проигравшим считается тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?

Негеометрическая комбинаторная геометрия

Комбинаторная комбинаторная геометрия

1. На шахматной доске расставляют королей так, чтобы они били все клетки. Каково наименьшее число королей для этого нужно?

2. Из листа клетчатой бумаги 29×29 клеток вырезали 99 квадратов 2×2. Докажите, что из остатка можно вырезать ещё один такой квадрат.

Просто комбинаторная геометрия

3. Прожектор освещает прямой угол. Четыре прожектора поместили в произвольных точках плоскости. Докажите, что прожекторы можно повернуть так, что они осветят всю плоскость.

4. Квадратный каток надо осветить четырьмя прожекторами, висящими на одной высоте. Каков наименьший радиус освещённых кругов?

5. Коридор полностью покрыт несколькими ковровыми дорожками. Докажите, что можно убрать несколько дорожек так, чтобы
(a) коридор был полностью покрыт, а общая длина оставшихся дорожек была не больше удвоенной длины коридора;
(b) оставшиеся дорожки не перекрывались и их суммарная длина была не меньше половины длины коридора.

6. На столе лежат 15 журналов, полностью покрывая его. Докажите, что можно убрать 7 журналов так, чтобы оставшиеся покрывали не менее $8/15$ площади стола.

7. Пусть A — наибольшее число попарно непересекающихся кругов диаметра 1, центры которых лежат внутри многоугольника M, B — наименьшее число кругов диаметра 2, которыми можно покрыть многоугольник. Что больше: A или B? (Перечислите все возможности.)

Часть IV

Группа «10,11» (Гризли)

Письменная олимпиада, 10–11 классы

1. Найдите минимальное положительное число x, удовлетворяющее неравенству: $x^2 - [x]^2 \geqslant 2014$.

2. Пусть $P(m, n)$ — количество делителей числа m, не меньших чем n. Вычислите

$$\sum_{i=1}^{1000} P(1000 + i, i)$$

3. В летней школе состоялся шахматный турнир в один круг. Исход партии называется *неожиданным*, если в этой партии игрок, набравший в турнире меньшее количество очков, обыграл игрока, набравшего большее количество очков. Может ли доля партий с *неожиданным* исходом быть больше 75%? Напомним, что в шахматах в случае победы игрок получает одно очко, в случае ничьи — пол-очка, и ноль очков в случае поражения.

4. В остроугольном треугольнике ABC на сторонах BC, CA, AB отмечены пары точек A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 соответственно таким образом, что длины отрезков AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, CC_1, CC_2 равны. Докажите, что середины перечисленных выше равных отрезков лежат на одной окружности.

Квадратный трёхчлен

1. **(a)** Докажите, что любой рациональный корень уравнения $x^2 + px + q = 0$ с целыми коэффициентами p и q является целым числом.
(b) Уравнения $x^2+p_1x+q_1 = 0$ и $x^2+p_2x+q_2 = 0$ с целыми коэффициентами p_1, q_1, p_2, q_2 имеют общий нецелый корень. Докажите, что $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$.

2. Пусть коэффициенты уравнений $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ и $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ связаны соотношением $p_1p_2 = 2(q_1+q_2)$. Докажите, что хотя бы одно из этих уравнений имеет решение.

3. $f(x)$ — квадратный трехчлен. Для какого наибольшего количества натуральных значений n может быть верно $f(n + 2) = f(n + 1) + f(n)$.

4. Один из двух приведенных квадратных трехчленов имеет два корня меньших тысячи, другой — два корня больших тысячи. Может ли сумма этих трехчленов иметь один корень меньший тысячи, а другой — больший тысячи?

5. Известно, что $f(x)$ и $g(x)$ — квадратные трехчлены. Может ли уравнение $f(g(x)) = 0$ иметь корни 2, 3, 5, 7?

6. Приведенные квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что оба уравнения $f(g(x)) = 0$ и $g(f(x)) = 0$ не имеют вещественных корней. Докажите, что хотя бы одно из уравнений $f(f(x)) = 0$ и $g(g(x)) = 0$ тоже не имеет вещественных корней.

Добавка по алгебре и теории чисел

1. Докажите, что ни при каком целом k число k^2+k+1 не делится на 101.

2. Рассмотрим все натуральные числа, в десятичной записи которых отсутствует ноль. Докажите, что сумма обратных величин любого количества из этих чисел не превосходит некоторого числа C.

3. Существуют ли три попарно различных ненулевых целых числа, сумма которых равна нулю, а сумма тринадцатых степеней которых является квадратом некоторого натурального числа?

4. Два многочлена $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ и $Q(x)=x^2+px+q$ принимают отрицательные значения на некотором интервале I длины более 2, а вне I — неотрицательны. Докажите, что найдется такая точка x_0, что $P(x_0)<Q(x_0)$.

5. Докажите неравенство для положительных a_1, a_2, …, a_n:

$$\left(1+\frac{1}{a_1(1+a_1)}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{a_2(1+a_2)}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n(1+a_n)}\right)\geqslant\left(1+\frac{1}{a(1+a)}\right)^n$$

где a — среднее геометрическое чисел a_1, a_2, …, a_n.

Многочлены с целыми коэффициентами

1. Докажите, что если многочлен с целыми коэффициентами при трех различных целых значениях переменной принимает значение 1, то он не имеет ни одного целого корня.

2. Докажите, что многочлен степени n, принимающий в $n+1$ подряд идущих целых точках только целые значения, принимает целые значения во всех целых точках.

3. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любых различных целых чисел a и b число $P(a) - P(b)$ делится на $a - b$.

4. Докажите, что не существует многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, для которого $P(6) = 5$ и $P(14) = 9$.

5. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ степени n с натуральными коэффициентами найдется такое целое число k, что числа $P(k)$, $P(k+1)$, $\ldots$, $P(k+1996)$ будут составными.

6. Дан многочлен двадцатой степени с целыми коэффициентами. На плоскости отметили все точки с целыми координатами, у которых ординаты не меньше 0 и не больше 10. Какое наибольшее число отмеченных точек может лежать на графике этого многочлена?

Метод Штурма

1. Докажите, что при сближении двух чисел с сохранением их суммы
(a) их произведение увеличивается;
(b) их сумма квадратов уменьшается;
(c) их сумма n-ных степеней уменьшается.

2. Докажите, что при сближении двух чисел с сохранением их произведения
(a) их сумма уменьшается;
(b) их сумма квадратов уменьшается.

3. Докажите неравенства между средними (слева на право: среднее гармоническое, геометрическое, арифметическое, квадратическое)

$$\frac{n}{1/x_1 + 1/x_2 + \ldots + 1/x_n} \leqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \\ \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$$

4. Пусть положительные числа x_1, x_2, …, x_n таковы, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Докажите, что тогда

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}{x_1 x_2 \ldots x_n} \geqslant (n-1)^n$$

5. Пусть неотрицательные числа x_1, x_2, …, x_n таковы, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{2}$. Докажите, что тогда

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}{(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)} \geqslant \frac{1}{3}$$

6. Докажите, что $0 \leqslant xy + yz + zx - 2xyz \leqslant 7/27$, при $x, y, z \geqslant 0$ и $x + y + z = 1$.

7. Докажите, что из всех выпуклых n — угольников, вписанных в данную окружность, наибольшим является периметр правильного.

Неравенства

1. Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}$. Докажите неравенство

$$\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geqslant ab - ac + 2bc.$$

2. Докажите, что для любого натурального $n \geqslant 3$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}\,.$$

3. Действительные числа x, y, z принадлежат отрезку $[0; 1]$. Докажите неравенство

$$x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) \leqslant 1.$$

4. **(a)** Пусть $a_1 > a_2$, $b_1 > b_2$. Докажите, что $a_1b_1 + a_2b_2 > a_1b_2 + a_2b_1$.
(b) *Транс-неравенство.* Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$, а $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — некоторая перестановка чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Докажите, что

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \geqslant a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n \geqslant \\ \geqslant a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1.$$

(c) *Неравенство Чебышёва.* Докажите, что для чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$ справедливо неравенство

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \leqslant n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n).$$

5. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$a + b + c \geqslant \frac{a(b+1)}{a+1} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{c(a+1)}{c+1}\,.$$

6. a, b, c, d — положительные числа. Докажите, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geqslant \frac{64}{a+b+c+d}\,.$$

7. **(a)** *Неравенство КБШ.* Рассмотрев квадратный трехчлен $(a_1x - b_1)^2 + \ldots + (a_nx - b_n)^2$ докажите неравенство

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2\,.$$

(b) Для положительных a_1, a_2, …, a_n, b_1, b_2, …, b_n докажите неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}\,.$$

8. Даны положительные числа a, b, c. Докажите неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}\,.$$

9. Докажите неравенство для чисел x, y, z из отрезка $[0;1]$:

$$3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - 2xyz(x+y+z) \leqslant 3.$$

10. При положительных a, b, c, d докажите, что

$$1 \leqslant \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} \leqslant 2.$$

Функция Эйлера

Определение. Пусть n — натуральное число. *Функцией Эйлера* $\varphi(n)$ называется количество натуральных чисел не больших n и взаимно простых с ним.

Далее во всех задачах n, m, a — натуральные числа, p — простое. Через (m, n) обозначается НОД чисел m и n.

1. **(a)** Докажите, что $\varphi(p^n) = p^{n-1}(p-1)$.
(b) Пусть $(m, n) = 1$. Докажите, что $\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$. Это свойство называется *мультипликативностью. (Подсказка: рассмотрим остаток r при делении на mn взаимно простой с mn. Докажите, что ни для какого другого остатка q, взаимно простого с mn, не могут одновременно совпадать остатки при делении q и r на m и остатки при делении q и r на n.)*
(c) Пусть $m = p_1^{t_1} \ldots p_k^{t_k}$ — разложение на простые множители. Докажите, что
$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) .$$

2. Докажите, что $\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \ldots + \varphi(d_s) = m$, где суммирование ведется по всем делителям числа m. *(Подсказка: посчитайте количество дробей $1/m$, $2/m$, …, m/m.)*

3. Найдите сумму всех правильных несократимых дробей со знаменателем n.

4. **(a)** Докажите *теорему Эйлера*. Пусть $(a, m) = 1$, тогда $a^{\varphi(m)} - 1$ делится на m. *(Подсказка: если x и y — различные остатки по модулю m и взаимно простые с ним, то ax и ay тоже различные остатки по модулю m и взаимно простые с ним.)*
(b) Докажите усиление теоремы Эйлера. Пусть $m = p_1^{t_1} \ldots p_k^{t_k}$ — разложение на простые множители. Положим $L(m) = \text{НОК}(\varphi(p_1^{t_1}), \ldots, \varphi(p_k^{t_k}))$. Тогда, если $(a, m) = 1$, то $a^{L(m)} - 1$ делится на m.

5. Простое число p больше пяти. Докажите, что число из $p - 1$ единицы делится на p.

6. Докажите, что для каждого n существует натуральное число, состоящее только из нулей и единиц, которое делится на n.

7. Дано число 2^{2014}. Докажите, что можно приписать к нему слева несколько цифр так, чтобы получилась степень двойки.

8. Докажите, что $\varphi(a^n - 1)$ делится на n.

9. Число $1/n$, где n взаимно просто с 10, представили в виде периодической десятичной дроби. Докажите, что ее период является делителем $\varphi(n)$.

Теория чисел

1. Каждое из натуральных чисел a, b, c и d делится на натуральное число $ab-cd$. Докажите, что $ab-cd=1$.

2. Рассматриваются 2014 чисел: 11, 101, 1001, ... Докажите, что среди этих чисел не менее 99% составных.

3. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что $ab=cd$. Докажите, что число $a+b+c+d$ — составное.

4. *Китайская теорема об остатках.* Натуральные числа m_1, ..., m_n попарно взаимно просты.
(a) Найдите в явном виде какое-нибудь целое число x, удовлетворяющее системе
$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{m_1} \\ x \equiv 0 \pmod{m_2} \\ \dots \\ x \equiv 0 \pmod{m_n} \end{cases}$$
(b) Для любых целых a_1, a_2, ..., a_n найдите все целые x, удовлетворяющие системе
$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \dots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

5. Существуют ли 100 подряд идущих чисел таких, что ровно 10 из них простые?

6. Докажите, что среди любых 10 натуральных чисел можно выбрать несколько, сумма которых делится на 10.

7. Даны натуральные числа a, b, c, взаимно простые в совокупности. Верно ли, что обязательно существует такое натуральное n, что число $a^k+b^k+c^k$ не делится на 2^n ни при одном натуральном k?

8. Докажите, что уравнение
$$x^2+y^2+z^2+t^2=2xyzt$$
не имеет решений в натуральных числах.

Геометрия. Листик первый

1. Внутри остроугольного треугольника ABC отмечена точка P, а на его стороне BC — точка A_1. Описанные окружности треугольников BA_1P и CA_1P пересекают стороны AB и AC в точках C_1, B_1 соответственно. Докажите, что четырехугольник AB_1PC_1 - вписанный.

2. Окружности ω_1, ω_2 пересекаются в точках A, B. На дуге окружности ω_1, лежащей вне ω_2, отмечена точка X. Прямые XA, XB вторично пересекают ω_2 в точках P, Q. Докажите, что прямая PQ параллельна касательной, проведённой к окружности ω_1 в точке X.

3. Из точки X, лежащей на высоте AH остроугольного треугольника ABC опущены перпендикуляры XC_1, XB_1 на стороны AB, AC. Докажите, что точки B, C, B_1, C_1 лежат на одной окружности.

4. PA — касательная к описанной окружности треугольника ABC. Из точки P опущены перпендикуляры PB_1, PC_1 на прямые AC, AB соответственно. Докажите, что прямые BC и B_1C_1 перпендикулярны.

5. Вписанная окружность касается стороны BC в точке P; PR — диаметр вписанной окружности. Вневписанная окружность касается стороны BC в точке Q. Докажите, что A, R, Q лежат на одной прямой.

6. O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, H — его ортоцентр. Докажите, что расстояние от точки O до стороны BC вдвое меньше длины отрезка AH.

7. В угол вписаны две окружности, касающиеся друг друга. Докажите, что в четырехугольник, вершинами которого являются точки касания окружностей со сторонами угла, можно вписать окружность.

8. Дан описанный четырехугольник $ABCD$. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABC, BCD, CDA, DAB являются вершинами прямоугольника.

Геометрия. Листик второй

1. В окружность, на которой отмечены неподвижные точки B и C, вписываются всевозможные треугольники ABC. Найдите ГМТ центров вписанных окружностей всех таких треугольников.

2. *Лемма Архимеда.* В сегмент, ограниченный хордой MN, вписана окружность, касающаяся хорды MN в точке X, дуги MN в точке Y. Докажите, что прямая XY проходит через середину дуги NM.

3. На сторонах AB, AC отмечены точки X, Y соответственно так, что $BX = CY$. Докажите, что описанная окружность треугольника AXY проходит через середину дуги BAC описанной окружности треугольника ABC.

4. К точкам B и C, лежащим на окружности ω, проведены касательные, пересекающиеся в точке A. M — середина BC. X — такая точка на ω, что $\angle AXB = 90°$. Докажите, что $\angle CXM = 90°$.

5. В угол AXB вписана окружность, касающаяся сторон угла в точках A и B. На меньшей дуге AB отмечена точка K. Прямая, проходящая через K, параллельно AX, пересекает XB в точке L. Прямая AK вторично пересекает описанную окружность ω треугольника KLB в точке M. Докажите, что MX касается ω.

6. K, L — точки касания вписанной и вневписанной окружностей треугольника ABC с отрезком BC соответственно; I, I_A — их центры. Докажите, что IL и I_AK пересекаются на высоте треугольника, опущенной из точки A.

7. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1, пересекающиеся в точке H. P — точка пересечения B_1C_1 и AA_1; Q — точка пересечения AO и BC, где O — центр описанной окружности треугольника. M — середина BC. Докажите, что $PQ \parallel HM$.

8. В треугольнике ABC выполнено $AB < BC$. I — центр вписанной окружности, M — середина AC, N — середина дуги ABC. Докажите, что $\angle IMA = \angle INB$.

Добавка по геометрии

1. В квадрате $ABCD$ отмечена такая точка X, что $\angle BDX = \angle CBX = \alpha$. Найдите $\angle DAX$.

2. K — основание перпендикуляра, опущенного из ортоцентра H на касательную к описанной окружности треугольника ABC в точке A. M — середина стороны BC. Докажите, что треугольник AMK равнобедренный.

3. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Окружность ω_3 с центром в точке A пересекает ω_1 в точках M, N и пересекает окружность ω_2 в точках P, Q. Докажите, что биссектрисы углов $\angle PBM = \angle QBN$.

4. *Лемма о велосипедистах.* Даны две пересекающиеся в точках A и B окружности. Из точки A одновременно стартуют два велосипедиста и едут каждый по своей окружности в направлении против часовой стрелки с равными угловыми скоростями.
   (a) Докажите, что в любой момент времени прямая, соединяющая велосипедистов проходит через точку B.
   (b) Докажите, что на плоскости найдется точка, равноудаленная от велосипедистов в любой момент времени.

5. В сегмент окружности, натянутый на меньшую дугу AB вписываются всевозможные окружности. M — середина большей дуги AB. Из точки M ко всевозможным окружностям проводятся касательные MX, где X — точка касания со всевозможной окружностью. Найдите геометрическое место точек X.

6. В треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1. Перпендикуляр из B_1 на BC пересекает дугу BC описанной окружности треугольника ABC в точке K. Перпендикуляр из B на AK пересекает AC в точке L. Докажите, что точки K, L и середина дуги AC (не содержащей точку B) лежат на одной прямой.

Они пересекаются!

1. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках M и N. Прямые O_1M и O_2M пересекают первую окружность в точках A_1 и B_1, а вторую в точках A_2 и B_2. Докажите, что прямые A_1B_1, A_2B_2 и MN пересекаются в одной точке.

2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH. Пусть I, I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей треугольников ABC, ACH и BCH соответственно. Докажите, что CI перпендикулярно I_1I_2.

3. Дан прямоугольник $ABCD$. Пусть биссектриса угла A пересекает прямую CD в точке E, а биссектриса внешнего угла C пересекает прямую AD в точке F. Докажите, что отрезок EF равен и перпендикулярен диагонали прямоугольника.

4. С помощью линейки, на которой отмечен единичный отрезок, проведите прямую, перпендикулярную данной.

5. В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляр BH на сторону AD. На отрезке BH отметили точку M, равноудаленную от точек C и D. Пусть K — середина AB. Докажите, что угол MKD прямой.

6. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, перпендикулярные сторонам CD и BC соответственно. Докажите, что эти прямые пересекаются на AC.

7. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина CD. Через точку C провели прямую, перпендикулярную прямой BM, а через точку M — прямую, перпендикулярную диагонали BD. Докажите, что два проведенных перпендикуляра пересекаются на прямой AD.

8. В треугольнике ABC угол B равен $120°$. Пусть A_1, B_1, C_1 — основания биссектрис. Докажите, что угол $\angle A_1B_1C_1$ прямой.

Немного об Эйлере

1. **(a)** Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, H — его ортоцентр, A_1 — середина стороны BC. Докажите, что $AH = 2OA_1$.
   (b) Докажите, что в треугольнике ABC точка пересечения высот, точка пересечения медиан и центр описанной окружности лежат на одной прямой, причем $HM = 2MO$.

2. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. H_A и H_B — ортоцентры треугольников BCD и ACD соответственно. Докажите, что $H_AH_B = AB$.

3. В условиях предыдущей задачи аналогично определим точки H_C и H_D. Докажите, что отрезки AH_A, BH_B, CH_C и DH_D пересекаются в одной точке H.

4. Из середины каждой стороны вписанного четырехугольника $ABCD$ опустили перпендикуляр на противоположную сторону. Докажите, что эти четыре прямых пересекаются в одной точке. Что это за точка?

5. Докажите, что прямые, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника $ABCD$, и прямая, соединяющая середины диагоналей, пересекаются в одной точке M.

6. Докажите, что точка H из задачи 3, точка M из задачи 5, а также центр O описанной окружности вписанного четырехугольника $ABCD$, лежат на одной прямой, причем $OM = MH$.

Немного об играх

1. Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди ставят крестики в свободные клетки доски. Петя ходит первый. Петя всегда ходит первый. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре, если игра происходит на доске **(a)** 3×5; **(b)** $N \times M$?

2. Петя и Вася решили поиграть в другую игру. Теперь они по очереди кладут одинаковые круглые монеты на круглый стол на свободное место. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

3. Очередная игра. На этот раз Петя и Вася положили на стол две стопки монет: в одной m, в другой n штук. В свой ход они либо берут произвольное количество монет из любой стопки, либо одинаковое количество монет из обеих стопок. Забравший последнюю монету побеждает. Кто выигрывает в зависимости от размеров стопок?

4. Петя и Вася по очереди ставят цифры от 1 до 9 в квадрат 9×9. В клетку разрешается ставить цифру, если она еще не встречается ни в клетках того же столбца, ни в клетках той же строки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

5. Петя и Вася по очереди закрашивают по две клетки на полоске 1×2010. Петя хочет, чтобы расстояния между двумя отмеченными им за один ход клетками не повторялись. Сможет ли Вася ему помешать? (Первым ходит Петя; игра заканчивается, когда все клетки полоски закрашены).

6. Два игрока, Петя и Вася, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 22. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 22 или больше камней. Кто выигрывает при правильной игре? (Вычислите ответ при каждом начальном количестве камней.)

7. Дана куча из n спичек. Два игрока играют в следующую игру: каждый из них своим ходом может взять из кучи 4^k спичек, где $k \geqslant 0$. Проигрывает не имеющий хода. При каких n игрок, делающий первый ход, может обеспечить себе победу независимо от игры второго?

Инварианты и полуинварианты

1. На доске вначале выписаны два числа: 3 и 6. За один ход разрешается увеличить любое число на доске на сумму цифр любого из выписанных. Можно ли добиться того, чтобы каждое число превратилось в 2010?

2. Имеются три автомата. На вход им подается карточка (a, b). Первый печатает карточку (b, a). Второй — $(a, a+b)$. Третий, при $a > b$, печатает $(a-b, b)$. Возможно ли при помощи этих автоматов получить из карточки $(1, 1)$ карточку $(1000, 2000)$?

3. В строчку выписаны n натуральных чисел. Разрешается взять любые два числа a и b такие, что a стоит левее b и $b \neq ka$, и заменить a на (a, b), b на $[a, b]$. Докажите, что такие операции не могут продолжаться бесконечно долго.

4. На Архипелаге Сыщик гоняется за Шпионом. Оба используют только маршрутные корабли, которые курсируют ежедневно между некоторыми островами. Каждый корабль отплывает утром и приплывает на остров назначения к вечеру. С пересадками можно добраться с любого острова на любой. Сыщик всегда знает, где сейчас Шпион, и поймает его, если окажется с ним на одном острове. Сыщик может плыть в любой день, Шпион не плавает по пятницам. Как Сыщику поймать Шпиона?

5. На доске написаны несколько натуральных чисел. Каждую минуту выбирают какие-то два из них (x и y) и заменяют их на числа $x-2$ и $y+1$. Докажите, что рано или поздно на доске появится отрицательное число.

6. **(a)** В клетках таблицы 99×99 расставлены плюсы и минусы. Если в каком-то ряду (строке или столбце) минусов больше чем плюсов, разрешается в этом ряду поменять все знаки на противоположные. Докажите, что через некоторое время и во всех строках, и во всех столбцах плюсов будет больше чем минусов.
(b) В клетках таблицы 99×99 расставлены целые числа. Если в каком-то ряду (строке или столбце) сумма отрицательна, разрешается в этом ряду поменять все знаки всех чисел на противоположные. Докажите, что через некоторое время сумма чисел в каждом из рядов будет неотрицательной.
(c) В клетках таблицы 99×99 расставлены числа (не обязательно целые). Если в каком-то ряду (строке или столбце) сумма отрицательна, разрешается в этом ряду поменять все знаки всех чисел на противоположные. Докажите, что через некоторое время сумма чисел в каждом из рядов будет неотрицательной.

7. В строке в произвольном порядке записаны числа $1, 2, \ldots, 100$. Петя находит пару рядом стоящих чисел, где правое меньше левого, и меняет их местами. Докажите, что рано или поздно числа расположатся по порядку $1, 2, \ldots, 100$.

8. Из всех замкнутых ломаных с вершинами в данных точках выбрали самую короткую. Докажите, что эта ломаная несамопересекающаяся.

9. Есть куча из n камней. Разрешается заменять кучу на любое количество куч с меньшим количеством камней (возможно, различным в разных кучах). Докажите, что наступит момент, когда уже нельзя будет сделать ни одной такой операции.

10. На плоскости дано 100 красных и 100 синих точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести 100 непересекающихся отрезков с разноцветными концами.

11. По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное число комнат, занумерованных по порядку целыми числами, и в каждой стоит по роялю. В этих комнатах живет некоторое количество пианистов (в одной комнате могут жить несколько пианистов). Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах — k-й и $(k+1)$-й, приходят к выводу, что они мешают друг другу и переселяются соответственно в $(k-1)$-ю и $(k+2)$-ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся.

12. В год выборов в Лапландии все города подняли над ратушами флаги — голубые либо оранжевые. Каждый день жители узнают цвета флагов у соседей в радиусе 100 км. Один из городов, где у большинства соседей флаги другого цвета, меняет свой флаг на этот другой цвет. Докажите, что со временем смены цвета флагов прекратятся.

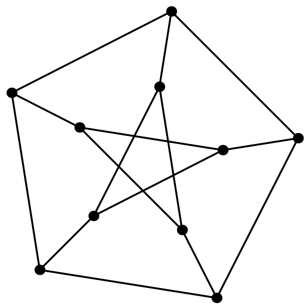
Примитивная классика

1. Докажите, что $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ двумя способами:
   (a) алгебраически; **(b)** без использования формул.
2. Докажите, что $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ двумя способами:
   (a) алгебраически; **(b)** без использования формул.
3. Найдите коэффициенты при раскрытии скобок в выражении $(a+b)^n$.
4. Докажите, что $C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$.
5. Найдите сумму $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \ldots + 2^n C_n^n$.
6. Найдите сумму $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$
7. Сколько решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$
   (a) в натуральных числах?
   (b) в целых неотрицательных числах?
8. Сколько решений имеет уравнение $x + y + z = 100$ в натуральных числах, не превосходящих 60?
9. Улитка должна проползти вдоль линий клетчатой бумаги путь длины $2n$, начав и кончив свой путь в данном узле. Сколько различных маршрутов может проползти улитка?

Планарные графы

1. На плоскости изображен связный граф с В вершинами и Р ребрами, разбивающий плоскость на Г граней. Докажите формулу Эйлера $\text{В} - \text{Р} + \Gamma = 2$.

2. **(a)** От каждого из трех домов ведет тропинка к каждому из трех колодцев. Докажите, что какие-то две тропинки пересекаются.
(b) В лагере «Команда» школа, столовая, третий корпус, пятый корпус и футбольное поле попарно соединены тропинками. Докажите, что какие-то две тропинки пересекаются
(c) Можно ли на плоскости изобразить граф Петерсена без самопересечений?



3. **(a)** На контурном глобусе нарисовано несколько стран. Вася хочет раскрасить их в три цвета так, чтобы страны одного цвета не граничили. Докажите, что трех цветов может не хватить.
(b) Докажите, что хотя бы одна из граней многогранника имеет не более 5 сторон.
(c) Докажите, что 5 цветов Васе точно хватит.

4. В квадрате отметили 100 точек и соединили их между собой и с вершинами квадрата так, что он оказался разбит на треугольнички.
(a) Сколько было треугольничков?
(b) Докажите, что в одном из них все углы не превосходят 120°.

5. Докажите, что грани плоского графа можно раскрасить в два цвета так, чтобы никакие две грани одного цвета не граничили в том и только том случае, когда степень каждой вершины этого графа четна.

Часть V

Группа «10» (Тигры)

Письменная олимпиада, 10 класс

1. Решите уравнение $[x^3] = \{x^2\} + 11$ (где $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x, а $\{x\} = x - [x]$).

2. За какое минимальное число дней n футбольных команд могут сыграть круговой турнир? Каждая команда должна сыграть с каждой, в один день одна команда может играть не более одного матча.

3. На каждой стороне треугольника взято по две точки так, что все шесть отрезков, соединяющих эти точки с противолежащей вершиной, равны между собой. Докажите, что середины этих отрезков лежат на одной окружности.

4. В Мексиканском заливе плавает нефтяное пятно. Каждый день оно мгновенно меняется по следующему закону: вокруг каждой точки залива очерчивается круг радиуса 1 миля, считается площадь попавшей в круг части пятна, и, если эта площадь превышает половину площади круга, то тогда и только тогда точка становится покрытой пятном. Все точки меняются одновременно. Докажите, что когда-нибудь пятно исчезнет.

Многочлены: китайская теорема об остатках, лемма Гаусса, ...

Предварительные сведения

1. $\mathbb{Z}[x]$ — множество многочленов от переменной x с целыми коэффициентами, $\mathbb{R}[x]$ — с действительными коэффициентами, ...
2. Если a, b — целые числа и $f \in \mathbb{Z}[x]$, то $(b-a) \mid (f(b)-f(a))$.
3. *Деление многочленов с остатком.* Если $p(x)$ и $q(x)$ — многочлены, причем $q(x)$ не равен нулю тождественно, то существуют многочлены $t(x)$ и $r(x)$ такие, что $p(x) = q(x)t(x) + r(x)$, и $\deg r(x) < \deg q(x)$; при этом $t(x)$ и $r(x)$ определяются однозначно.
4. *Теорема Безу.* Остаток от деления многочлена $p(x)$ на $(x-c)$ равен $p(c)$.
5. Для двух многочленов $p(x)$, $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ всегда определен их *наибольший общий делитель* $d(x) = (p(x), q(x)) \in \mathbb{R}[x]$ (многочлен максимальной степени, на который делится каждый из данных). При этом существуют $u(x), v(x) \in \mathbb{R}[x]$ такие, что $u(x)p(x) + v(x)q(x) = d(x)$. При этом $\mathbb{R}$ можно заменять на $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{Z}$.
6. Два многочлена $a(x)$ и $b(x)$ называются *сравнимыми по модулю* $m(x)$, если их разность делится на $m(x)$. Как и для чисел, соотношение сравнимости для двух многочленов записывается в виде $a(x) \equiv b(x) \pmod{m(x)}$.

Задачи

1. Пусть a, b и n — натуральные числа. Известно, что при любом натуральном k $(k \neq b)$ число $a - k^n$ делится без остатка на $b - k$. Докажите, что $a = b^n$.

2. **(a)** Пусть a, m и n — натуральные числа, $a > 1$. Докажите, что если $a^m + 1$ делится на $a^n + 1$, то m делится на n.
(b) Пусть a, b, m, n — натуральные числа, причем $(a, b) = 1$, и $a > 1$. Докажите, что если $a^m + b^m$ делится на $a^n + b^n$, то m делится на n.

3. Пусть $f(x) = x^2 - x + 1$. Докажите, что для любого натурального $m > 1$ числа m, $f(m)$, $f(f(m))$, ... попарно взаимно просты.

4. Пусть f и g — взаимно простые многочлены с целыми коэффициентами. Докажите, что последовательность чисел $a_n = (f(n), g(n))$ периодическая.

5. **Китайская теорема об остатках для многочленов.** Пусть $m_1(x)$, ..., $m_n(x)$ попарно взаимно простые многочлены, то есть $(m_i(x), m_j(x)) = 1$ при

$i \neq j$, $a_1(x)$, …, $a_n(x)$ — произвольные многочлены. Докажите, что тогда существует ровно один многочлен $p(x)$ такой, что $\deg p(x) < \deg m_1(x) + \ldots + \deg m_n(x)$ и

$$\begin{cases} p(x) \equiv a_1(x) \pmod{m_1(x)} \\ \ldots \\ p(x) \equiv a_n(x) \pmod{m_n(x)}. \end{cases}$$

6. **Лемма Гаусса I.** Многочлен с целыми коэффициентами называется *примитивным*, если НОД его коэффициентов равен 1. Докажите, что произведение двух примитивных многочленов также является примитивным многочленом.

7. **Лемма Гаусса II.** Если многочлен $f \in \mathbb{Z}[x]$ можно разложить в произведение двух многочленов $g, h \in \mathbb{Q}[x]$, то его можно представить и в виде $f = \widetilde{g}\widetilde{h}$, где $\widetilde{g}, \widetilde{h} \in \mathbb{Z}[x]$.

8. Пусть $p \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg p > 1$. Докажите, что существует бесконечная последовательность целых чисел, не являющихся значениями многочлена p.

9. *Лемма Шура.* Пусть $f \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg f > 0$. Докажите, что множество простых чисел, делящих хотя бы одно из ненулевых чисел $f(1)$, $f(2)$, …, $f(n)$, … бесконечно.

10. Пусть $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ — неприводимые многочлены с единичными старшими коэффициентами, и $\deg f, \deg g > 0$. Известно, что для достаточно больших n множества простых делителей чисел $f(n)$ и $g(n)$ совпадают. Докажите, что $f = g$.

11. Пусть $f \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg f > 0$ и n, k — натуральные числа. Докажите, что найдется натуральное a такое, что каждое из чисел $f(a)$, $f(a+1)$, …, $f(a+n-1)$ имеет по крайней мере k различных простых чисел.

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Начало

1. Решите уравнение

$$c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+b\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}=x.$$

2. Докажите тождество

$$c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}=x^2.$$

3. Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ — действительные числа. Постройте многочлены $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_n(x)$ степени $n-1$, которые удовлетворяют условиям $f_i(x_i) = 1$ и $f_i(x_j) = 0$ при $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

4. Опишите явный вид многочлена $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$, где $f_i(x)$ — многочлены из предыдущей задачи.

5. Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ — действительные числа. Докажите, что для любых y_1, y_2, $\ldots$, y_n существует единственный многочлен $f(x)$ степени не выше $n-1$ такой, что $f(x_1) = y_1$, $\ldots$, $f(x_n) = y_n$.

6. Какие остатки дает многочлен $f(x)$ из предыдущей задачи на многочлены вида $(x - x_i)$? Соотнесите этот факт с китайской теоремой об остатках для многочленов.

Определение. Многочлен степени не выше $n - 1$, значения которого в данных точках x_1, $\ldots$, x_n *(узлах интерполяции)* совпадают с заданными числами y_1, $\ldots$, y_n, называется *интерполяционным многочленом Лагранжа.*

7. Пусть A, B и C — остатки от деления многочлена $P(x)$ на $x-a$, $x-b$ и $x-c$. Найдите остаток от деления того же многочлена на произведение $(x-a)(x-b)(x-c)$.

8. Постройте многочлены $f(x)$ степени не выше 2, которые удовлетворяют условиям:
(a) $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(2) = 3$;
(b) $f(-1) = -1$, $f(0) = 2$, $f(1) = 5$;
(c) $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(2) = 4$.

9. Корабль с постоянной скоростью проплывает мимо небольшого острова. Капитан каждый час измеряет расстояние до острова. В 12, 14 и 15 часов расстояния равнялись 7, 5 и 11 километров соответственно. Каким было расстояние до острова в 13 часов? Чему оно будет равно в 16 часов?

10. На плоскости расположено 100 точек. Известно, что через каждые четыре из них проходит график некоторого квадратного трехчлена. Докажите, что все 100 точек лежат на графике одного квадратного трехчлена.

11. Решите систему

$$\begin{cases} z + ay + a^2x + a^3 &= 0 \\ z + by + b^2x + b^3 &= 0 \\ z + cy + c^2x + c^3 &= 0 \end{cases}$$

12. Про многочлен $f(x) = x^{10} + a_9x^9 + \ldots + a_0$ известно, что

$$f(1) = f(-1), \quad \ldots, \quad f(5) = f(-5).$$

Докажите, что $f(x) = f(-x)$ для любого действительного x.

13. Пусть $P(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что хотя бы одно из чисел $|3^{n+1} - P(n+1)|, \ldots, |3^1 - P(1)|, |1 - P(0)|$ не меньше 1.

Продолжение

14. Докажите, что если $f(x)$ есть многочлен, степень которого меньше n, то дробь

$$\frac{f(x)}{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}$$

($x_1, x_2, \ldots, x_n$ — произвольные попарно различные числа) может быть представлена в виде суммы n простейших дробей:

$$\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - x_n} \ ,$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ некоторые константы.

15. Решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{a_1 - b_1} + \dfrac{x_2}{a_1 - b_2} + \ldots + \dfrac{x_n}{a_1 - b_n} = 1 \\ \dfrac{x_1}{a_2 - b_1} + \dfrac{x_2}{a_2 - b_2} + \ldots + \dfrac{x_n}{a_2 - b_n} = 1 \\ \ldots \\ \dfrac{x_1}{a_n - b_1} + \dfrac{x_2}{a_n - b_2} + \ldots + \dfrac{x_n}{a_n - b_n} = 1 \end{cases}$$

16. Пусть $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ и f — полином степени 990 такой, что $f(k) = F_k$ при $k \in \{992, \ldots, 1982\}$. Докажите, что $f(1983) = F_{1983} - 1$.

17. Пусть f — полином с целыми коэффициентами, и p — простое число такое, что $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, и $f(k)$ сравнимо либо с 0, либо с 1 по модулю p для всех целых k. Докажите, что степень f не меньше $p - 1$.

18. Пусть a_1, a_2, $\ldots$, a_n — попарно различные целые числа. Докажите, что для произвольного натурального k число

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^k}{\prod_{j\neq i}(a_i - a_j)}$$

является целым.

Производящие функции

Определение. Выражения вида

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \tag{1}$$

называются *формальными степенными рядами.*

Формальные степенные ряды можно складывать, вычитать, умножать, делить, дифференцировать и (с некоторыми ограничениями) устраивать их композицию, не беспокоясь о сходимости.

Определение. Производной формального степенного ряда (1) называется ряд

$$F'(x) = a_1 + 2a_2x \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$$

1. Найдите произведения следующих формальных степенных рядов:
(a) $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots)$.
(b) $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)^2$.

2. **Обращение степенного ряда.** Докажите, что если $a_0 \neq 0$, то для ряда $F(x)$ существует ряд $F^{-1}(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n + \ldots$ такой, что $F(x)F^{-1}(x) = 1$.

3. Вычислите ряды (найдите коэффициенты):
(a) $(1 + x)^{-1}$; **(b)** $(1 - x)^{-1}$; **(c)** $(1 - x)^{-2}$.

Определение. Пусть $\{a_n\} = a_0, a_1, \ldots$ — произвольная числовая последовательность. Формальный степенной ряд $F(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots$ будем называть производящей функцией этой последовательности.

4. Вычислите производящие функции следующих последовательностей (выразите их как «конечные» выражения, т. е. рациональные функции от x):
(a) $a_n = n$; **(b)** $a_n = n^2$; **(c)** $a_n = C_m^n$.

5. Вычислите суммы:
(a) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$;
(b) $C_n^1 + 2^2C_n^2 + 3^2C_n^3 + \ldots + n^2C_n^n$.

6. *Счастливые билеты.* Предположим, что у нас имеется 1 000 000 автобусных билетов с номерами от 000 000 до 999 999. Будем называть билет счастливым, если сумма первых трех цифр его номера равна сумме трех последних. Пусть N — количество счастливых билетов. Докажите равенства:
(a) $(1+x+\ldots+x^9)^3 \cdot (1+x^{-1}+\ldots+x^{-9})^3 = x^{27}+\ldots+a_1x+N+a_1x^{-1}+\ldots+x^{-27}$;
(b) $(1 + x + \ldots + x^9)^6 = 1 + \ldots + Nx^{27} + \ldots + x^{54}$.

7. Найдите число счастливых билетов.

8. Докажите, что производящая функция последовательности чисел Фибоначчи $F(z) = F_0 + F_1 z + F_2 z^2 + \ldots$ может быть записана в виде

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \varphi z} - \frac{1}{1 - \widehat{\varphi} z} \right),$$

где $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\widehat{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
(Для знающих производную.) Докажите формулу Бине.

9. Пусть $C(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ — производящая функция последовательности чисел Каталана $\{C_n\}$. Докажите, что она удовлетворяет равенству $C(z) = zC^2(z)+1$, и получите явный вид функции $C(z)$.

10. Выведите формулу для чисел Каталана, воспользовавшись результатом предыдущей задачи и равенством $(1-z)^{1/2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C^n_{1/2}(-z)^n$, где $C^n_{1/2}$ — обобщённые биномиальные коэффициенты:

$$C^n_{1/2} = \frac{(1/2)(1/2-1)\ldots(1/2-n+1)}{n!}$$

Китайская теорема об остатках

Китайская теорема об остатках. Пусть целые числа $m_1, \ldots, m_n$ попарно взаимно просты, то есть $(m_i, m_j) = 1$ при $i \neq j$, $m = m_1 \ldots m_n$, и $a_1, \ldots, a_n$ — произвольные целые числа. Тогда существует ровно одно целое число x такое, что $0 \leqslant x < m$ и

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ \ldots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

1. Найдите наименьшее натуральное число, дающее при делении на 2, 3, 5, 7 остатки 1, 2, 4, 6 соответственно.

2. При каких целых n число $a_n = n^2 + 3n + 1$ делится на 55?

3. Найдите остатки от деления:
(a) 19^{10} на 66; **(b)** 19^{14} на 70; **(c)** 17^9 на 48; **(d)** $14^{14^{14}}$ на 100.

4. Пусть натуральные числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ попарно взаимно просты. Докажите, что если числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ пробегают полные системы вычетов по модулям $m_1, m_2, \ldots, m_n$ соответственно, то число

$$x = x_1 m_2 \ldots m_n + m_1 x_2 m_3 \ldots m_n + \ldots + m_1 m_2 \ldots m_{n-1} x_n$$

пробегает полную систему вычетов по модулю $m_1 m_2 \ldots m_n$. Выведите отсюда китайскую теорему об остатках.

5. Найдите наименьшее натуральное число, половина которого — квадрат, треть — куб, а пятая часть — пятая степень.

6. Пусть $p \in \mathbb{Z}[x]$ и для любого n значение $p(n)$ делится либо на 2, либо на 3. Докажите, что либо все числа $p(n)$ делятся на 2, либо все они делятся на 3.

7. Докажите, что существует сколь угодно длинный отрезок из натуральных чисел, каждое из которых делится на квадрат некоторого простого числа.

8. Точку $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ назовем *невидимой* (из начала координат), если $d = (x, y) > 1$ (её загораживает точка $(x/d, y/d)$, находящаяся на том же луче). Докажите, что для любого $k > 0$ найдется такая точка $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, что каждая из точек $(a + x, b + y)$ $(0 \leqslant x, y < k)$ является невидимой.

9. Докажите, что для любого натурального k существует сколь угодно длинный отрезок из натуральных чисел, каждое из которых делится по крайне мере на k различных простых чисел.

10. Докажите, что в наборе $1{\cdot}2, 2{\cdot}3, \ldots, n(n+1)$ существует $2^{\omega(n)}$ чисел, делящихся на n ($\omega(n)$ — количество простых делителей n).

11.* Бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, содержит полный квадрат и полный куб. Докажите, что она содержит шестую степень целого числа.

Андрей Меньщиков
группа: Тигры

Добавка по теории чисел

1. Простые p и q таковы, что $q \mid (p^2+1)$ и $p \mid (q^2-1)$. Докажите, что число $(p+q+1)$ — составное.
2. Докажите, что для любых натуральных k, a $(a>1)$ найдется натуральное n, для которого число $k \cdot a^n + 1$ — составное.
3. Существует ли непостоянный многочлен $f(x)$ такой, что для любого натурального n выполнено $f(n) \mid (2^n - 1)$?
4. Докажите, что существует натуральное n, для которого $2^n + 2011$ имеет хотя бы 2011 различных простых делителей.
5. *Здесь была задача, которой здесь не было (вы её не видели).*
6. *Здесь тоже.*

Центр масс, часть 1

Определение. *Материальная точка* — это точка вместе с размещенной в ней массой m. Далее, под записью вида mA мы будем подразумевать, что в точку A помещена масса m.

Определение. *Центром масс* материальных точек m_1A_1, …, m_nA_n называется материальная точка mZ, для которой $m_1\overrightarrow{ZA_1} + m_2\overrightarrow{ZA_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{ZA_n} = \overrightarrow{0}$ и $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$.

При решении задач будем считать, что сумма всех масс не равна нулю.

Правило рычага. Для двух материальных точек m_1A_1 и m_2A_2 их центр масс — это материальная точка $(m_1+m_2)Z$, где Z — такая точка прямой A_1A_2, для которой $m_1 \cdot \overrightarrow{A_1Z} = m_2 \cdot \overrightarrow{ZA_2}$.

Основная теорема. Если Z — центр масс системы материальных точек m_1M_1, …, m_nM_n, причем $m_1+\ldots+m_n \neq 0$, то для любой точки O выполняется равенство

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{OM_n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}\ .$$

И обратно, если хотя бы для одной точки O выполнено это равенство, то Z — центр масс системы.

Существование и единственность. Центр масс системы точек существует и единственен.

Правило группировки. Если часть точек системы заменить их центром масс, то центр масс системы не изменится.

Упражнение 1. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $2:1$, считая от вершины.

Упражнение 2. Докажите, что середины диагоналей, а также точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника, лежат на одной прямой.

Упражнение 3. Докажите, что можно расставить в вершины треугольника положительные массы так, чтобы их центр масс попал в заданную внутреннюю треугольника точку.

1. Пусть P — середина медианы AM треугольника ABC. Прямая BP пересекает AC в точке E. В каком отношении отрезок AC делится точкой E?

2. Какие массы нужно расположить в трех вершинах параллелограмма, чтобы их центр масс оказался в четвертой вершине?

Определение. *Чевианой* называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой на противолежащей стороне.

3. *Теорема Чевы.* На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что чевианы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

4. *Точка Жергонна.* Пусть вписанная в треугольник окружность касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что чевианы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

5. *Теорема ван Обеля.* Чевианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке K. Докажите, что $AK/KA_1 = AB_1/B_1C + AC_1/C_1B$.

6. *Теорема Менелая.* На сторонах AB, BC и продолжении стороны AC за точку C треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

7. Старый пират зарыл клад на острове среди 20 деревьев. После этого он написал завещание, в котором указал, как искать клад: надо встать к первому дереву, пройти половину расстояния до второго дерева, затем повернуть к третьему и пройти треть расстояния до него, затем повернуть к четвертому и пройти четверть расстояния до него, и т. д., наконец, повернуть к двадцатому и пройти двадцатую часть расстояния до него. К сожалению, пират забыл указать, как занумерованы деревья! Сколько разных ям необходимо выкопать потомкам пирата, чтобы все-таки найти клад?

8. На окружности дано n точек одинаковой массы. Через центр масс любых $n-2$ точек проводится прямая, перпендикулярная хорде, соединяющей 2 оставшиеся точки. Докажите, что все такие прямые пересекаются в одной точке.

Центр масс, часть 2

1. В четырехугольнике $ABCD$ точка E — середина стороны AB, а точка K — середина стороны CD. Докажите, что середины отрезков AK, CE, BK и DE являются вершинами параллелограмма.

2. Пусть M, N и P — точки, расположенные на сторонах треугольника ABC и делящие эти стороны в одинаковых отношениях (т. е. $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA}$). Докажите, что точка пересечения медиан треугольника MNP совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC.

3. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты точки K, L и M соответственно так, что $AK : KB = 2 : 1$, $BL : LC = CM : AM = 1 : 2$. ML и CK пересекаются в точке P. Найдите, в каком отношении точка P делит отрезки CK и ML.

4. На сторонах AB, BC, CD и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки K, L, M и N соответственно, причем $AK : KB = DM : MC = p$, $BL : LC = AN : ND = q$. Пусть точка P — точка пересечения отрезков KM и LN. Найдите, в каком отношении точка P делит каждый из отрезков KM и LN.

5. На биссектрисе угла $\angle A$ неравнобедренного треугольника ABC выбрана точка K. Прямые BK и CK пересекают стороны AC и AB в точках L и M. Докажите, что прямая LM проходит через основание биссектрисы внешнего угла $\angle A$ треугольника.

6. *Точка Нагеля.* Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания вневписанных окружностей с соответствующими сторонами, пересекаются в одной точке.

7. Дан треугольник со сторонами a, b и c. Какие массы нужно поместить в его вершины, чтобы центром масс получившейся системы оказался
(a) центр вписанной окружности
(b) центр вневписанной окружности, касающейся стороны b
(c) точка Жергонна **(d)** точка Нагеля
данного треугольника?

8. Пусть точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC, AB треугольника ABC. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ABC совпадает с точкой Нагеля треугольника $A_1B_1C_1$.

9. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, B_1 — точка касания его вневписанной окружности со стороной AC, и M — середина стороны AC. Докажите, что $BB_1 \parallel IM$.

10. В треугольнике ABC отмечены M — точка пересечения медиан, I — центр вписанной окружности, O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот, N — точка Нагеля, и S — центр окружности, вписанной в треугольник, образованный средними линиями треугольника ABC.
(a) Докажите, что точки N, M, I и S лежат на одной прямой, причем $MN = 2\,IM$ и $IS = SN$.
(b) Докажите, что $HN \parallel OI$, причем $HN = 2\,OI$.

Центр масс, часть 3

1. Пусть O — произвольная точка внутри треугольника ABC. Докажите, что

$$S_{BOC} \cdot \overrightarrow{OA} + S_{AOC} \cdot \overrightarrow{OB} + S_{AOB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}.$$

2. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки K и L так, что $BK : KC = CL : LD$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника AKL лежит на диагонали BD.

3. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, M — точка пересечения его диагоналей, Q — середина стороны CD, $AD = a$, $BC = b$. В каком отношении прямая MQ делит сторону AB?

4. Через точку P, расположенную внутри параллелограмма $ABCD$, проведены прямые, параллельные сторонам параллелограмма. Они пересекают стороны AB, BC, CD и AD в точках K, L, M и N соответственно. Пусть Q — точка пересечения средних линий четырехугольника $KLMN$, а S — центр параллелограмма. Докажите, что Q лежит на отрезке PS и найдите, в каком отношении она его делит.

5. На прямой l отмечены 57 точек A_1, A_2, …, A_{57}, а вне неё — точка P. Возможно ли на отрезках PA_1, PA_2, …, PA_{57} нарисовать стрелки так, чтобы сумма полученных 57 векторов равнялась $\overrightarrow{0}$?

6. В вершинах правильного n-угольника расставлены числа: $(n-1)$ нулей и одна единица. Разрешается увеличить на 1 все числа в вершинах любого правильного k-угольника, вписанного в данный многоугольник. Можно ли такими операциями сделать все числа равными?

7. Центрально симметричная фигура на клетчатой бумаге состоит из n «уголков» из четырех клеток (в виде буквы Г) и k прямоугольников размером 1×4. Докажите, что n четно.

8. В квадрате 10×10 расставлены числа от 1 до 100 следующим образом: в первой строке (слева направо по порядку) 1, 2, …, 10, во второй — 11, 12, …, 20, и т. д., в десятой — 91, 92, …, 100. Разрешается взять любой прямоугольник 1×3 и сделать следующую операцию: прибавить к крайним числам по 1, а из среднего отнять 2, или сделать обратную операцию. Через некоторое время оказалось, что в квадрате опять присутствуют все числа от 1 до 100. Докажите, что они расположены на первоначальных местах.

9. Дана пирамида $SABCD$, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$. Плоскость α пересекает ребра SA, SB, SC, SD в точках K, L, M, N соответственно. Докажите, что $\frac{AK}{KS} + \frac{CM}{MS} = \frac{BL}{LS} + \frac{DN}{NS}$.

Прямая Симсона

1. Рассмотрим треугольник ABC и произвольную точку P. Пусть A_1, B_1 и C_1 — основания перпендикуляров из точки P на прямые BC, AC и AB соответственно.
(a) Докажите, что если P лежит на описанной окружности треугольника ABC, то точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.
(b) Докажите, что если точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, то точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC.

2. **(a)** Даны точки A, B, C, лежащие на одной прямой, и точка P вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP, ACP, BCP и точка P лежат на одной окружности.
(b) *Точка Микеля.* Четыре попарно пересекающиеся прямые образуют четыре треугольника. Докажите, что описанные окружности этих треугольников пересекаются в одной точке.
(c) Докажите, что центры описанных окружностей этих треугольников и точка Микеля лежат на одной окружности.

3. В треугольнике ABC провели биссектрису AA_1, из точки A_1 опустили перпендикуляры A_1B_1 и A_1C_1 на стороны AC и AB соответственно. На отрезке B_1C_1 выбрана точка M так, что $MA_1 \perp BC$. Докажите, что точка M лежит на медиане треугольника ABC, проведенной из вершины A.

4. Окружность с центром в точке I, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и BC в точках C_1 и A_1 соответственно. Окружность, проходящая через точки B и I, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Докажите, что середина отрезка MN лежит на прямой A_1C_1.

5. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$ и точка P на его описанной окружности. Докажите, что проекции точки P на прямые Симсона треугольников ABC, ABD, ACD и BCD лежат на одной прямой.

6. Точка P движется по описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что при этом прямая Симсона точки P относительно ABC поворачивается на угол, равный половине угловой величины дуги, пройденной P.

7. Докажите, что прямые Симсона двух диаметрально противоположных точек описанной окружности треугольника ABC перпендикулярны, а их точка пересечения лежит на окружности Эйлера.

8. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, P — произвольная точка на описанной окружности ABC. Докажите, что прямая Симсона точки P делит отрезок PH пополам.

9. Докажите, что на описанной окружности треугольника существует ровно три точки такие, что их прямая Симсона касается окружности Эйлера, причем они образуют равносторонний треугольник.

Немного об Эйлере

1. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, H — его ортоцентр, A_1 — середина стороны BC. Докажите, что $AH = 2OA_1$.

2. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. H_A и H_B — ортоцентры треугольников BCD и ACD соответственно. Докажите, что $H_AH_B = AB$.

3. В условиях предыдущей задачи аналогично определим точки H_C и H_D. Докажите, что отрезки AH_A, BH_B, CH_C и DH_D пересекаются в одной точке H.

4. Обозначим за l_a прямую Симсона точки A относительно треугольника BCD. Аналогично определим l_b, l_c и l_d. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке. Что это за точка?

5. Из середины каждой стороны вписанного четырехугольника $ABCD$ опустили перпендикуляр на противоположную сторону. Докажите, что эти четыре прямых пересекаются в одной точке. Что это за точка?

6. Пусть прямые, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника $ABCD$, и прямая, соединяющая середины диагоналей, пересекаются в точке M. Докажите, что точка H из задачи 3, точка M, а также центр O описанной окружности вписанного четырехугольника $ABCD$, лежат на одной прямой, причем $OM = MH$.

7. Докажите, что центры окружностей Эйлера треугольников ABC, ABD, ACD, BCD лежат на одной окружности.

8. Докажите, что окружности Эйлера треугольников ABC, ABD, ACD, BCD пересекаются в точке H.

Воробьями по пушкам и окрестности

1. **Воробей 1.** Задан неравнобедренный треугольник ABC, на его сторонах AB и BC выбраны точки C_0 и A_0 соответственно, B_1 — середина дуги ABC описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что равенство $AC_0 = CA_0$ выполняется тогда и только тогда, когда точки A_0, C_0, B_1, B лежат на одной окружности.

2. **Воробей 2.** Задан треугольник ABC, на его сторонах AB и BC выбраны точки C_0 и A_0 соответственно, I — центр вписанной окружности в ABC. Докажите, что окружность, описанная около треугольника A_0BC_0, проходит через I тогда и только тогда, когда $AC_0 + CA_0 = AC$.

3. Дан неравнобедренный треугольник ABC ($AB < BC$), B_1 — середина дуги ABC описанной окружности треугольника ABC, M — середина стороны AC. Докажите, что центры I_A и I_C окружностей, вписанных в треугольники AMB и CMB, и точки B и B_1 лежат на одной окружности.

4. Дан неравнобедренный треугольник ABC ($AB < BC$), B_1 — середина дуги ABC описанной окружности w треугольника ABC, I — центр вписанной в ABC окружности, M — середина стороны AC. Докажите, что $\angle IB_1B = \angle IMA$.

5. Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC следующим образом: $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть I_A, I_B и I_C — центры окружностей, вписанных в треугольники AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C. Докажите, что центр описанной окружности треугольника $I_AI_BI_C$, совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC.

6. Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC следующим образом: $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть O_A, O_B и O_C — центры окружностей, описанных около треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника $O_AO_BO_C$, совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC.

7. Точки E и F — середины большой дуги AC и малой дуги AC описанной около остроугольного неравнобедренного треугольника ABC ($AB < BC$). Пусть G — проекция E на BC. Докажите, что описанная окружность около треугольника ABG проходит через середину отрезка BF.

8. **Воробей 3.** Точки X и Y движутся с постоянными скоростями (не обязательно равными) по двум прямым, пересекающимся в точке O. Докажите, что окружность, описанная около треугольника XYO, проходит через 2 фиксированные точки O и Z, где Z является центром поворотной гомотетии, переводящий местоположения точек X в местоположения точек Y.

Замечание. Осмыслите первые две задачи с помощью задачи 8.

9. Дан треугольник ABC и окружность с центром O, проходящая через вершины A и C и повторно пересекающая отрезки AB и BC в различных точках K и N соответственно. Окружности, описанные около треугольников ABC и KBN, имеют ровно две общие точки B и M. Докажите, что угол OMB — прямой.

10. Пусть на дуге BC (не содержащей точки A) описанной окружности w треугольника ABC выбрана точка E, а на стороне AC — точка F. Докажите, что через луч EF — биссектриса угла AEC тогда и только тогда, когда $\angle IEB = \angle IFA$, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

Замечание. Эти удивительно важное свойство! Особенно запомните ситуацию, когда F совпадает с точкой касания вписанной окружности в треугольник ABC со стороной BC.

Воробьями по пушкам, продолжение

11. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки C_1 и A_1. Пусть K — середина A_1C_1, а I — центр вписанной окружности в треугольник ABC. Оказалось, что четырехугольник A_1BC_1I вписанный. Докажите, что угол AKC тупой.

12. Пусть на стороне AC выбрана точка D. Обозначим через I_A и I_C центры вписанных окружностей в треугольники ABD и CBD, а через B' точку касания вписанной окружности со стороной AC. Докажите, что угол $I_AB'I_C$ — прямой.

13. Пусть A_0, B_0 и C_0 — точки касания вневписанных окружностей с соответствующими сторонами треугольника ABC. Описанные окружности треугольников A_0B_0C, AB_0C_0 и A_0BC_0 пересекают второй раз описанную окружность w треугольника ABC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику, образованному точками касания вписанной окружности треугольника ABC с его сторонами.

14. Дан треугольник ABC и окружность с центром O, проходящая через вершины A и C и повторно пересекающая отрезки AB и BC в различных точках K и N соответственно. Окружности, описанные около треугольников ABC и KBN, имеют ровно две общие точки B и M. Докажите, что угол OMB — прямой.

15. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC биссектриса острого угла между высотами AA_1 и CC_1 пересекает стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Биссектриса угла B пересекает отрезок, соединяющий ортоцентр треугольника ABC с серединой AC, в точке R. Докажите, что точки P, B, Q и R лежат на одной окружности.

16. Дан четырехугольник $ABCD$ такой, что $BC = AD$ и BC не параллельна AD. На сторонах BC и AD выбраны такие точки E и F, что $BE = DF$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P, прямые BD и EF — в точке Q, прямые EF и

AC — в точке R. Докажите, что окружности, описанные около треугольников PQR (при изменении положений точек E и F), проходят через одну точку, отличную от P.

Рекурренты в комбинаторике, часть 1

Немного зацикливаний

1. В последовательности 2014... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предыдущих четырех цифр.
  (a) Встретится ли в этой последовательности набор цифр 2013?
  (b) Докажите, что эта последовательность периодична.
  (c) Есть ли у этой последовательности предпериод?
  (d) Встретится ли в этой последовательности набор цифр 1201?

2. Числа w_n образуют последовательность 1, 3, 13, 63, 313, ... (каждое число, начиная с третьего, вычисляется по формуле $w_n = 5w_{n-1} - 2$). Докажите, что в этой последовательности бесконечно много членов, дающих остаток 1 при делении на 101.

3. Кубик Рубика вывели из исходного состояния некоторой последовательностью поворотов граней. Докажите, что если повторять эту последовательность поворотов достаточно долго, то кубик в конце концов вернется в исходное состояние.

4. На бесконечной в обе стороны ленте записан текст на русском языке. Известно, что в этом тексте число различных кусков из 15 символов равно числу различных кусков из 16 символов. Докажите, что на ленте записан периодический *в обе стороны* текст, например: «...мама мыла раму мама мыла раму ...»

5. Государство Элмышатия всегда существовало и всегда будет существовать. Каждый день в этом государстве либо идет дождь, либо бушует буря, либо светит солнце. Известно, что погода в данный день однозначно определяется погодой за предшествующую четырехдневку. Всю последнюю четырехдневку шел дождь. Докажите, что и до и после этого дождливых четырехдневок было бесконечно много.

6. Докажите, что в ряду Фибоначчи существует число, делящееся на 2014.

7. $\{a_n\}$ — последовательность чисел между 0 и 1, в которой следом за x идет $1 - |1 - 2x|$. Докажите, что эта последовательность, начиная с некоторого места, периодическая, если и только если a_1 рациональное.

8. Последовательность задается следующими соотношениями:

$$x_{2n} = x_n, \quad x_{4n+1} = 1, \quad x_{4n+3} = 0.$$

Докажите, что эта последовательность не может быть периодической.

Рекурренты в комбинаторике, часть 2

Одномерные задачи

1. *Игра «Ханойская башня».* Имеется пирамида из n колец, надетых на стержень, и два пустых стержня той же высоты. Диаметры колец убывают от основания пирамиды к ее вершине (т. е. у основания находится самое большое кольцо, наверху — самое маленькое). Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Требуется переложить все кольца с одного стержня на другой. За какое наименьшее количество перекладываний это можно сделать?

2. На какое максимальное число частей можно разрезать головку сыра при помощи n разрезов?

(a) Головка плоская, разрезы прямолинейные.

(b) Головка объемная, разрезы плоские.

3. *Задача Иосифа Флавия.* n человек выстраиваются по кругу и нумеруются числами от 1 до n. Затем из них исключается каждый второй до тех пор, пока не останется только один человек. Для данного n будем обозначать через $J(n)$ номер последнего оставшегося человека. Докажите, что

$$J(2n) = 2J(n) - 1; \qquad J(2n+1) = 2J(n) + 1.$$

4. Рассмотрим все возможные наборы чисел из множества $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, не содержащие двух соседних чисел. Докажите, что сумма квадратов произведений чисел в этих наборах равна $(n+1)! - 1$.

5. *Обобщенная задача Иосифа Флавия.* Допустим, что в круг поставлено $2n$ человек, первые n из которых — славные ребята, а последние n — гадкие парни. Покажите, что всегда найдется такое целое m, зависящее от n, такое что если двигаясь по кругу мы наказываем каждого m-го, то все гадкие парни будут наказаны прежде, чем будет наказан хотя бы один из славных. Наказанный человек выбывает из круга сразу после наказания.

6. Банкир узнал, что среди одинаковых на вид монет одна — фальшивая (более легкая). Он попросил эксперта определить эту монету с помощью чашечных весов без гирь, причем потребовал, чтобы каждая монета участвовала во взвешиваниях не более двух раз. Какое наибольшее число монет может быть у банкира, чтобы эксперт заведомо смог выделить фальшивую за n взвешиваний?

7. В семейном альбоме есть десять фотографий. На каждой из них изображены три человека: в центре стоит мужчина, слева от мужчины — его сын, а справа — его брат. Какое наименьшее количество различных людей может быть изображено на этих фотографиях, если известно, что все десять мужчин, стоящих в центре, различны?

Рекурренты в комбинаторике, часть 3

Числа Фибоначчи

1. На первой клетке полоски $1 \times n$ сидит математический кузнечик. За один ход он может прыгнуть на одну или две клетки вправо. Сколько у него способов допрыгать из первой клетки в клетку с номером n?

2. Сколько способов разрезать полоску $2 \times n$ на доминошки?

3. Сколько среди n-значных чисел, состоящих из цифр 2 и 5, таких, у которых две двойки не стоят подряд?

4. Фермер купил овцу, которая тут же родила овечку. С тех пор каждый следующий год эта овца приносила по одной овечке. Каждая родившаяся овца через три года также начинает приносить по одной овечке в год. Допустим, что овцы бессмертны, а фермер их не продает и не режет. Сколько овец будет в его отаре через n лет после покупки?

5. Даны две последовательности a_n, b_n, в каждой из которых каждый член равен сумме двух предыдущих. При этом $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ и $b_0 = 2$, $b_1 = 1$. Найдите количество совпадающих членов

(a) с одинаковыми номерами, т. е. $a_k = b_k$;

(b) с необязательно одинаковыми номерами, т. е. $a_l = b_m$;

в этих последовательностях.

6. Рассматривается последовательность слов из букв `A` и `B`. Первое слово — `A`, второе — `B`, а k-е слово получается приписыванием к $(k-2)$-му слову справа $(k-1)$-го (так что начало последовательности имеет вид: `A`, `B`, `AB`, `BAB`, `ABBAB`, ...). Может ли в последовательности встретиться «периодическое» слово, то есть слово, состоящее из нескольких (по меньшей мере двух) одинаковых кусков, идущих друг за другом, и только из них?

7. Требуется сделать набор гирек, каждая из которых весит целое число граммов, с помощью которых можно взвесить любой целый вес от 1 до 55 граммов включительно даже в том случае, если некоторые гирьки потеряны (гирьки кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес — на другую). Рассмотрите два варианта задачи:

(a) необходимо подобрать 10 гирек, может быть потеряна любая одна;

(b) необходимо подобрать 12 гирек, могут быть потеряны любые две.

8. Имеется набор гирь, веса которых в граммах: 1, 2, 4, ..., 512 (последовательные степени двойки) — по одной гире каждого веса. Груз разрешается взвешивать с помощью этого набора, кладя гири на обе чашки весов. Каково наибольшее возможное количество способов взвесить некоторый груз указанным образом?

Рекурренты в комбинаторике, часть 4

Числа сочетаний

Определение. *Число сочетаний* $\binom{n}{k}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, задается рекуррентно:

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Замечание. Известной формулой $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ *пользоваться нельзя.*

1. *Определение.*
(a) *Треугольник Паскаля. Хромым королём* назовем «шахматную» фигуру, которая может ходить только на одну клетку и только вправо и вниз. Допустим, хромой король стоит в левом верхнем углу бесконечной вправо и вниз «шахматной» доски, вертикали и горизонтали которой занумерованы, соответственно, справа налево и сверху вниз неотрицательными целыми числами (начиная с нуля). Сколькими способами хромой король может добраться с поля $(0,0)$ на поле (p,q)?
(b) *Бином Ньютона.* При раскрытии скобок в выражении $(a+b)^n$ получается сумма выражений вида $a^k b^{n-k}$. Сколько раз встречается каждое из таких слагаемых?
(c) *Подмножества.* Сколько существует k-элементных подмножеств n-элементного множества?

Забавные свойства

2. $\displaystyle\sum_k \binom{n}{k} = 2^n; \quad \sum_k (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$ **3.** $\displaystyle\sum_k^n (-1)^k \binom{m}{k} = (-1)^{n-1}\binom{m-1}{n}.$

4. $(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}; \quad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$

6. $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = \binom{n}{m-k}\binom{n-m+k}{k}.$

5. $\displaystyle\sum_k \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$ **7.** $\displaystyle\sum_k \binom{n-k}{k} = F_n.$

8. На прямой в точке с координатой ноль сидит бактерия. Каждую минуту бактерия делится (если бактерия находилась в точке J, то через минуту две бактерии находятся в точках с координатами $J-1$ и $J+1$). Если в одну точку попадают две бактерии, то они обе погибают. Как будут расположены бактерии на прямой через 2 часа и 8 минут?

Рекурренты в комбинаторике, часть 5

Числа Каталана

Определение. *Числа Каталана* C_n, $n \geqslant 0$, задаются рекуррентно:

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \ldots + C_{n-1} C_0, \qquad C_0 = 1\,.$$

Докажите, что:

1. C_n равно количеству способов разбить выпуклый $(n+2)$-угольник на треугольники непересекающимися диагоналями.
2. C_n равно количеству способов расставить в ряд n открывающихся и n закрывающихся скобок так, чтобы запись была корректна (то есть, среди любого количества первых элементов ряда открывающихся скобок не меньше, чем закрывающихся).
3. C_n равно количеству плоских бинарных деревьев с $n+1$ листьями. Бинарным называется дерево с выделенной вершиной *(корнем)* степени 2, все остальные вершины которого имеют степень 1 или 3.
4. C_n равно количеству путей из точки $(0,0)$ в точку (n,n) по линиям клетчатой бумаги, идущих вверх и вправо и не поднимающихся выше прямой $y = x$.
5. C_n равно количеству последовательностей a_1, a_2, $\ldots$, a_{2n}, состоящих только из 1 или -1, и для всякого $k \in \{1, \ldots, 2n\}$ выполнено $a_1 + a_2 + \ldots + a_k \geqslant 0$, причем $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$.
6. C_n равно количеству способов разбить $2n$ точек на окружности на пары и соединить точки из одной пары отрезком так, чтобы отрезки не пересекались.
7. $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

Раскраски графов, часть 1

1. **(a)** Вершины графа можно разбить на две группы так, чтобы все ребра соединяли вершины из разных групп. Докажите, что все циклы в этом графе имеют четную длину.
(b) В графе любой цикл имеет четную длину. Докажите, что его вершины можно разбить на две группы так, чтобы все ребра соединяли вершины из разных групп.

2. Докажите, что можно выбрать не более половины вершин связного графа так, чтобы каждая из оставшихся вершин была соединена ребром с одной из выбранных.

3. В графе 2005 вершин, и степени всех вершин равны. Вершины графа раскрашены в красный, синий и зеленый цвет так, что концы любого ребра — разноцветные. Докажите, что найдется красная вершина, которая соединена и с синей, и с зеленой.

Определение. Пусть G — связный граф. Будем обозначать через $\Delta(G)$ и $\delta(G)$ максимальную и минимальную степень вершин графа G соответственно.

4. Пусть G — связный граф, $\Delta(G) = d$. Докажите, что граф G можно правильным образом раскрасить в d цветов, если
(a) есть вершина степени меньше d;
(b) есть вершина, при удалении которой граф теряет связность;
(c) $d > 2$ и есть две вершины такие, что при удалении их обеих граф теряет связность;
(d) Есть три вершины u, v, w такие, что u смежна с v и w, v и w не смежны между собой, и при удалении вершин v и w связность не нарушается.

5. *(Brooks, 1941)* Пусть G — связный граф, $\Delta(G) = d \geqslant 3$, отличный от полного графа K_{d+1}. Докажите, что вершины графа G можно правильным образом раскрасить в d цветов.

Определение. Обозначим через $\chi_G(k)$ количество правильных раскрасок G в k цветов. Хроматическое число графа $\chi(G)$ — это наименьшее натуральное k такое, что $\chi_G(k) \neq 0$.

6. **(a)** Докажите, что $\chi_G(k)$ — многочлен от k.
(b) Найдите хроматический многочлен дерева на n вершинах.
(c) Докажите, что любой граф с таким хроматическим числом — дерево на n вершинах.

7. Докажите, что из графа G можно удалить не более $1/n$ часть его ребер так, чтобы полученный граф имел правильную раскраску в n цветов.

Раскраски графов, часть 2

Красим ребра!

Определение. *Раскраска ребер* графа в k цветов — это разбиение множества его ребер на k подмножеств: $C = (E_1, E_2, \ldots, E_k)$. Мы будем говорить, что в раскраске C в вершине v *представлен* цвет i, если хотя бы одно из инцидентных v ребер раскрашено в цвет i. (Если таких ребер t, то можно сказать, что цвет i представлен в вершине v *ровно* t *раз*).

Определение. Раскраска ребер графа G называется *правильной*, если любые два ребра, имеющих общий конец, покрашены в разные цвета.

Определение. *Реберное хроматическое число графа* $\chi'(G)$ — это минимальное количество цветов, для которого существует правильная раскраска ребер графа G.

1. Ребра полного графа с 25 вершинами покрашены в 24 цвета. Докажите, что найдется вершина, из которой выходит 2 ребра одного цвета.

2. Верно ли, что ребра графа степени 3 всегда можно правильно раскрасить в 3 цвета?

3. **(a)** Докажите, что в любой компании из 6 человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.
(b) Докажите, что в любой компании из 9 человек найдутся либо четверо попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

4. Пусть G — связный граф, отличный от цикла нечетной длины. Докажите, что ребра графа G можно так раскрасить в два цвета, чтобы в каждой вершине были представлены ребра обоих цветов.

Определение. Пусть C — раскраска графа G. Для каждой вершины v обозначим через $c(v)$ количество цветов, в которое раскрашены ребра, инцидентные v.

Определение. Будем говорить, что C — *оптимальная* раскраска графа G в k цветов, если для любой другой раскраски C' выполнено $\sum_{v\in V} c(v) \geqslant \sum_{v\in V} c'(v)$.

5. Пусть $C = (E_1, \ldots, E_k)$ — оптимальная раскраска графа G в k цветов. Пусть вершина v и цвета i и j таковы, что в вершине v дважды представлен цвет i и не представлен цвет j. Докажите, что компонента связности графа $G[E_i \cup E_j]$, содержащая вершину v — простой цикл нечетной длины.

6. Пусть G — двудольный граф. Докажите, что $\chi'(G) = \Delta(G)$

7. Пусть G — двудольный граф, $\delta(G) = d$. Докажите, что существует правильная раскраска ребер графа G в d цветов, в которой в каждой вершине представлены все d цветов.

8. *(Вадим Визинг, 1964)* Докажите, что $\chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.

Часть VI

Группа «11» (Зубры)

Письменная олимпиада, 11 класс

1. Пусть $f(x) = 1 - 1/x$. Найдите $\underbrace{f(f(\ldots f(}_{2014} 2014)\ldots))$.

2. В остроугольном треугольнике ABC отметили середины сторон BC, CA, AB и ортоцентр и обозначили A_0, B_0, C_0, H соответственно. Окружность с центром A_0, проходящая через H, пересекает сторону BC в точках A_1, A_2. Аналогично определяются точки B_1, B_2, C_1, C_2. Докажите, что шесть точек A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности.

3. $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Обозначим $S(k)$ сумму цифр числа k. Докажите, что в последовательности $b_n = S\big(|P(n)|\big)$ какое-то число встретится бесконечно много раз.

4. В колоде 999 карт (попарно различных). Фокусник и ассистент показывают фокус. Зритель вытягивает из колоды две любые карты. Ассистент по своему усмотрению добавляет к двум вытянутым картам еще третью. После этого зритель из трех карт забирает себе любую. Затем в зал входит фокусник, которому отдают две оставшиеся карты (не указывая ему, какая из них первая, а какая вторая). Цель фокусника — угадать карту в руках у зрителя. Могут ли фокусник и ассистент, предварительно договорившись, осуществить фокус?

Основная теорема алгебры

Теорема. Любой многочлен степени не меньше единицы с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один комплексный корень.

Рассмотрим многочлен степени n с комплексными коэффициентами:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

1. Докажем основную теорему алгебры:

(a) Докажите, что можно выбрать такое действительное положительное число R, что для любого комплексного z, такого, что $|z| > R$ выполняется неравенство $|P(z)| > |a_0|$. *В последующих задачах имеется в виду именно этот R.*

(b) Докажите, в круге $|z| \leqslant R$ у функции $|P(z)|$ существует минимум. *(Попробуйте рассмотреть квадрат, который содержит круг $|z| \leqslant R$.)*

(c) Пусть в круге $|z| \leqslant R$ у функции $|P(z)|$ достигается минимум в точке z'. Допустим $|P(z')| > 0$. Докажите тогда, что модуль многочлена $P(z+z')/P(z')$ достигает минимума (на всей комплексной плоскости) в точке 0, и минимум этот равен единице.

(d) Докажите, что если у многочлена n-ой степени k — наименьшая ненулевая степень с ненулевым коэффициентом, то заменой $y = cz$, подбирая c, можно добиться, чтобы коэффициент многочлена a_k стал равен -1.

В результате предыдущих пунктов получим, что модуль многочлена $Q(z) = P(cz+z')/P(z')$ принимает минимум (на всей комплексной плоскости) в точке 0, минимум этот равен единице, и $Q(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_{k+1} z^{k+1} - z^k + 1$.

(e) Докажите, что существует такое действительное положительное число $\varepsilon < 1$, что внутри круга $|z| \leqslant \varepsilon$ выполняется неравенство $|z^k| > |b_n z^n + \ldots + b_{k+1} z^{k+1}|$.

(f) Докажите, что $|Q(x)| < 1$ для произвольного действительного положительного $x < \varepsilon$.

(g) Докажите основную теорему алгебры.

2. **(a)** Докажите, что многочлен $P(z)$ степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней, с учетом кратности. (Корень z_0 многочлена $P(z)$ имеет кратность k, если $P(z)$ делится на $(z - z_0)^k$ и не делится на $(z - z_0)^{k+1}$.)

(b) Докажите, что любой многочлен с вещественными коэффициентами разлагается в произведение многочленов первой и второй степени с вещественными коэффициентами.

3. Докажите, что если многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами принимает при всех действительных x неотрицательные значения, то он представим в виде $P(x) = Q^2(x) + R^2(x)$, для некоторых многочленов $Q(x)$, $R(x)$ с действительными коэффициентами.

Добавка по алгебре и теории чисел

1. Два многочлена $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ и $Q(x) = x^2 + px + q$ принимают отрицательные значения на некотором интервале I длины более 2, а вне I — неотрицательны. Докажите, что найдется такая точка x_0, что $P(x_0) < Q(x_0)$.

2. Последовательность натуральных чисел c_1, c_2, c_3, … такова, что для любых натуральных m и n, удовлетворяющих условию $1 \leqslant m \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i$, найдутся такие натуральные числа a_1, a_2, …, a_n, что $m = \sum_{i=1}^{n}(c_i/a_i)$. Для каждого i найдите максимально возможное значение величины c_i.

3. Для заданного натурального числа $k > 1$ через $Q(n)$, $n \in \mathbb{N}$, обозначим наименьшее общее кратное чисел n, $n+1$, …, $n+k$. Докажите, что существует бесконечно много $n \in \mathbb{N}$ таких, что $Q(n) > Q(n+1)$.

4. Пусть натуральные числа x, y, p, n, k таковы, что $x^n + y^n = p^k$. Докажите, что если число n ($n > 1$) нечетное, а число p нечетное простое, то n является степенью числа p (с натуральным показателем).

5. Для чисел x, y, z из отрезка $[1; 2]$ докажите неравенство

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geqslant 6\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\right)$$

Неравенство Йенсена

Определение. Функция $f(x)$ называется *выпуклой* на отрезке $[a;b]$, если для любых x_1, x_2 лежащих на этом отрезке и для любого $0 < \alpha < 1$ выполнено неравенство

$$\alpha \cdot f(x_1) + (1-\alpha) \cdot f(x_2) \geqslant f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)$$

Теорема Лагранжа. Если функция дифференцируема на отрезке $[a;b]$, то существует такая точка c лежащая на этом отрезке, что

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

1. Рассмотрим функцию $f(x)$, которая в каждой точке на отрезке $[a;b]$ имеет вторую производную. Докажите с помощью теоремы Лагранжа, что если первая производная монотонно не убывает на отрезке $[a;b]$ (т. е. вторая производная неотрицательна), то функция выпукла на этом отрезке.

2. **Неравенство Йенсена.** Докажите, что если функция выпукла на отрезке $[a;b]$, то для любых неотрицательных α_1, α_2, …, α_n, таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$ и x_1, x_2, …, x_n лежащих на $[a;b]$ выполняется неравенство:

$$\alpha_1 \cdot f(x_1) + \alpha_2 \cdot f(x_2) + \ldots + \alpha_n \cdot f(x_n) \geqslant f(\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n)$$

3. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0;\pi]$. Докажите, что
(a) $\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n \leqslant n \cdot \sin\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)$
(b) $\sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \ldots \cdot \sin x_n \leqslant \sin^n\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)$

4. Обозначим при положительных x_1, x_2, …, x_n и $p \neq 0$

$$M_p = \left(\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad M_0 = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}\,.$$

Докажите, что $M_p \geqslant M_q$, если
(a) $p > q > 0$ или $0 > p > q$; **(b)** $p > q = 0$, $0 = p > q$.

5. Выведите неравенство Коши-Буняковского-Шварца из выпуклости функции $1/x$.

6. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и для любых x_1, x_2 лежащих на этом отрезке выполняется следующее неравенство:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

Докажите, что $f(x)$ выпукла на $[a;b]$.

7. Докажите неравенство для $x_1, x_2, \ldots x_n \geqslant 1$:

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} \geqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}}\ .$$

Неравенства

1. Пусть положительные числа a, b, c таковы, что $1/a + 1/b + 1/c \geqslant a + b + c$. Докажите тогда, что $a + b + c \geqslant 3abc$.

2. Для чисел x, y из отрезка $[0; 1]$ докажите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{1+xy}}$$

3. **(a)** Для положительных a_1, a_2, …, a_n, b_1, b_2, …, b_n докажите неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$$

(b) Для положительных a_1, a_2, …, a_n докажите неравенство

$$\frac{a_1^3}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^3}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_n^3}{a_n + a_1} \geqslant \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)$$

4. Докажите неравенство для чисел x, y, z из отрезка $[0; 1]$:

$$3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - 2xyz(x + y + z) \leqslant 3$$

5. Для положительных a, b, c докажите неравенство

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geqslant \frac{1}{3}(a + b + c)$$

6. Положительные числа a, b и c таковы, что $abc = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1 + a + b} + \frac{1}{1 + b + c} + \frac{1}{1 + a + c} \leqslant 1$$

Теория чисел

1. **1.** Докажите, что если $\sqrt{7} - m/n > 0$, то $\sqrt{7} - m/n > 1/(mn)$, где m и n — натуральные числа.

2. Докажите, что уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2xyzt$$

не имеет решений в натуральных числах.

3. Даны натуральные числа a, b, c, взаимно простые в совокупности. Верно ли, что обязательно существует такое натуральное n, что число $a^k + b^k + c^k$ не делится на 2^n ни при одном натуральном k?

4. Даны натуральные числа m и n. Докажите, что число $2^n - 1$ делится на число $(2^m - 1)^2$ тогда и только тогда, когда число n делится на число $m \cdot (2^m - 1)$.

5. Дано натуральное число c и последовательность p_1, p_2, $\ldots$, p_n, $\ldots$ простых чисел, удовлетворяющая условию: $p_i + c$ делится на p_{i+1} (для любого натурального i). Докажите, что последовательность $\{p_n\}$ ограничена.

6. Докажите, что для любого натурального числа $n \neq 3$ и для любого натурального числа k, меньшего $n + 2$ существует простое число p такое, что $n! + k$ делится на p, но никакое из чисел $n! + 1$, $n! + 2$, $\ldots$, $n! + n$, $n! + n + 1$, кроме $n! + k$, не делится на p.

7. При каких натуральных $n > 1$ существуют такие натуральные b_1, b_2, $\ldots$, b_n (не все из которых равны), что при всех натуральных k число $(b_1 + k) \cdot (b_2 + k) \cdot \ldots \cdot (b_n + k)$ является степенью натурального числа? (Показатель степени может зависеть от k, но должен быть всегда больше 1.)

Проективная геометрия

1. На недорисованной картине изображена железная дорога, проложенная через равнину и уходящая за горизонт, а также две рядом лежащие шпалы, параллельные линии горизонта. Как с помощью линейки определить, где надо рисовать третью шпалу?

2. *Теорема Дезарга.* Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точки пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2BC_2, C_1A_1 и C_2A_2 лежат на одной прямой (считайте, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ невырожденные).

3. *Теорема Паппа.* Точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой; A_2, B_2, C_2 лежат на другой прямой. Докажите, что точки пересечения пар прямых A_1B_2 и A_2B_1, B_1C_2 и B_2C_1, C_1A_2 и C_2A_1 лежат на одной прямой.

4. *Теорема о трижды перспективных треугольниках.* Два треугольника назовем перспективными, если прямые, соединяющие их соответственные вершины пересекаются в одной точке. Известно, что треугольники ABC и $A'B'C'$ перспективны и треугольники ABC и $B'C'A'$ перспективны. Докажите, что треугольники ABC и $C'A'B'$ тоже перспективны.

5. Даны две пронумерованные четверки точек общего положения. Докажите, что проективное преобразование, переводящее одну четверку в другую
(a) существует; **(b)** единственно.

6. **(a)** На плоскости даны точка и две прямые, пересекающиеся в луже. Постройте одной линейкой прямую, проходящую через точку пересечения прямых и данную точку.
(b) На плоскости даны две точки и прямая. К точкам нельзя приложить линейку из-за лужи между ними. Постройте линейкой точку пересечения данной прямой и прямой, проходящей через данные точки.

7. Докажите, что с помощью одной линейки невозможно разделить данный отрезок пополам.

8. На сторонах AB, AC треугольника ABC отмечены точки X, Y; $XY \parallel BC$. Чевианы AP, AQ треугольника ABC пересекают отрезок XY в точках M, N соответственно. Докажите, что прямая, соединяющая точки пересечения пар прямых PX и CN, QY и BM проходит через вершину A.

9. Внутри треугольника ABC отмечена точка P, через которую проведены хорды треугольника A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 (предполагается, что вы догадаетесь о том, что такое хорды треугольника и на каких сторонах какие точки лежат). Оказалось, что прямые AP, C_2A_1, B_1A_2 пересекаются в одной точке. Докажите, что точки пересечения пар прямых A_1C_2 и CP, A_2B_1 и BP попадут на прямую B_2C_1.

10. На сторонах AC и AB треугольника ABC отмечены точки B' и C' соответственно, а на стороне BC отмечены точки A_A, A_P, A_B, A_C. Прямые BB', CC' пересекаются в точке P. Известно, что AA_A, PA_P, $B'A_B$ и $C'A_C$ пересекаются в одной точке. Докажите, то AA_P, PA_A, $B'A_C$, $C'A_B$ также пересекаются в одной точке.

Проективные преобразования. Окружность

1. Внутри окружности даны точки P, O. На окружности отмечают произвольную точку X_0. Затем проводят хорды X_0X_1, X_1X_2, X_2X_3 через точки O, P, O соответственно. Докажите, что все хорды X_0X_3 проходят через одну точку, не зависящую от выбора X_0.

2. *Задача о бабочке.* K — середина хорды MN окружности. Через неё проводятся еще две хорды: AC, BD. Хорды AB, CD пересекают отрезок MN в точках X, Y. Докажите, что $KX = KY$.

3. *Теорема Паскаля.* Докажите, что точки пересечения пар противоположных сторон вписанного в окружность шестиугольника лежат на одной прямой.

4. Четыре прямые, проведённые из точки P пересекают окружность в парах точек: A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2, D_1 и D_2. Докажите, что двойные отношения четвёрок точек A_1, B_1, C_1, D_1 и A_2, B_2, C_2, D_2 на окружности равны.

5. На окружности в указанном порядке отметили шесть точек: A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2. Вершины треугольника, сторонами которого являются прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, обозначили A, B, C (где какая вершина угадайте). Касательные к парам точек A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 пересекаются в точках A', B', C' соответственно. Докажите, что AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

6. Окружность пересекает стороны треугольника как в предыдущей задаче. A'', B'', C'' — точки пересечения BB_1 и CC_2, CC_1 и AA_2, AA_1 и BB_2 соответственно. Докажите, что AA'', BB'', CC'' пересекаются в одной точке.

7. Вписанная в четырехугольник $ABCD$ окружность касается сторон AB, BC, CD, DA в точках K, L, M, N соответственно. Докажите, что точки пересечения пар прямых BC и KM, AL и KN, DL и MN лежат на одной прямой.

8. В треугольнике ABC проведены чевианы AA_1, BB_1, CC_1, пересекающиеся в одной точке. Из точек A_1, B_1, C_1 проведены касательные ко вписанной окружности, отличные от сторон треугольника. Точки касания обозначили A_2, B_2, C_2. Докажите, что AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке.

9. На плоскости нарисована парабола. С помощью циркуля и линейки отметьте её вершину.

Поляры

1. Докажите, что точки пересечения касательных в вершинах треугольника к описанной окружности этого треугольника с противоположными сторонами лежат на одной прямой.

2. *Теорема Брианшона для четырехугольника.* Докажите, что в описанном четырехугольнике точка пересечения хорд, соединяющих точки касания вписанной окружности с противоположными сторонами, совпадает с точкой пересечения диагоналей.

3. Вписанная окружность с центром I касается сторон BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1. Прямые B_1C_1 и BC пересекаются в точке A_2. Докажите, что $A_2I \perp AA_1$.

4. В условиях предыдущей задачи докажите, что перпендикуляр из I на AA_2 проходит через точку пересечения прямых AA_1 и B_1C_1.

5. Во вписанном четырехугольнике отметили точки пересечения пар противоположных сторон и диагоналей. Докажите, что ортоцентр треугольника с вершинами в отмеченных точках совпадает с центром описанной окружности четырехугольника.

6. Окружность ω_2 проходит через центр O окружности ω_1 и пересекает её в точках M, N. На дуге ω_2, лежащей вне ω_1, берется произвольная точка L. OL и MN пересекаются в точке K. Через K проводится хорда XY окружности ω_1. Докажите, что LK — биссектриса угла XLY.

7. Вписанная окружность с центром I касается сторон BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1. Окружность с центром A, проходящая через B_1 и C_1, пересекает прямую, проведённую сквозь A параллельно BC, в точках B_2, C_2; причем порядок троек точек B, A_1, C и C_2, A, B_2 на параллельных прямых один и тот же. Докажите, что BB_2, CC_2, B_1C_1, A_1I пересекаются в одной точке.

8. Докажите, что в одновременно вписанном и описанном четырехугольнике прямая, проходящая через точки пересечения пар противоположных сторон, перпендикулярна прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей.

9. A_1 — такая точка на прямой BC, что AA_1 касается описанной окружности треугольника ABC. Из A_1 проводятся касательные AX и AY к окружности девяти точек треугольника ABC (X и Y — точки касания). Докажите, что XY проходит через A.

Воробьями по пушкам и окрестности

1. **Воробей 1.** Задан неравнобедренный треугольник ABC, на его сторонах AB и BC выбраны точки C_0 и A_0 соответственно, B_1 — середина дуги ABC описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что равенство $AC_0 = CA_0$ выполняется тогда и только тогда, когда точки A_0, C_0, B_1, B лежат на одной окружности.

2. **Воробей 2.** Задан треугольник ABC, на его сторонах AB и BC выбраны точки C_0 и A_0 соответственно, I — центр вписанной окружности в ABC. Докажите, что окружность, описанная около треугольника A_0BC_0, проходит через I тогда и только тогда, когда $AC_0 + CA_0 = AC$.

3. Дан неравнобедренный треугольник ABC ($AB < BC$), B_1 — середина дуги ABC описанной окружности треугольника ABC, M — середина стороны AC. Докажите, что центры I_A и I_C окружностей, вписанных в треугольники AMB и CMB, и точки B и B_1 лежат на одной окружности.

4. Дан неравнобедренный треугольник ABC ($AB < BC$), B_1 — середина дуги ABC описанной окружности w треугольника ABC, I — центр вписанной в ABC окружности, M — середина стороны AC. Докажите, что $\angle IB_1B = \angle IMA$.

5. Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC следующим образом: $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть I_A, I_B и I_C — центры окружностей, вписанных в треугольники AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C. Докажите, что центр описанной окружности треугольника $I_AI_BI_C$, совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC.

6. Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC следующим образом: $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть O_A, O_B и O_C — центры окружностей, описанных около треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника $O_AO_BO_C$, совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC.

7. Точки E и F — середины большой дуги AC и малой дуги AC описанной около остроугольного неравнобедренного треугольника ABC ($AB < BC$). Пусть G — проекция E на BC. Докажите, что описанная окружность около треугольника ABG проходит через середину отрезка BF.

8. **Воробей 3.** Точки X и Y движутся с постоянными скоростями (не обязательно равными) по двум прямым, пересекающимся в точке O. Докажите, что окружность, описанная около треугольника XYO, проходит через 2 фиксированные точки O и Z, где Z является центром поворотной гомотетии, переводящий местоположения точек X в местоположения точек Y.

Замечание. Осмыслите первые две задачи с помощью задачи 8.

9. Пусть на дуге BC (не содержащей точки A) описанной окружности w треугольника ABC выбрана точка E, а на стороне AC — точка F. Докажите, что через луч EF — биссектриса угла AEC тогда и только тогда, когда $\angle IEB = \angle IFA$, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

Замечание. Эти удивительно важное свойство! Особенно запомните ситуацию, когда F совпадает с точкой касания вписанной окружности в треугольник ABC со стороной BC.

10. На дуге AC описанной окружности треугольники ABC, не содержащей точку B, выбрана точка E. Докажите, что центры I_a и I_c вписанных окружностей треугольников AEB и CEB, точка E и точка T_b касания полувписанной (соответствующей вершине B) и описанной окружностей лежат на одной окружности.

Воробьями по пушкам, продолжение

11. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки C_1 и A_1. Пусть K — середина A_1C_1, а I — центр вписанной окружности в треугольник ABC. Оказалось, что четырехугольник A_1BC_1I вписанный. Докажите, что угол AKC тупой.

12. Пусть на стороне AC выбрана точка D. Обозначим через I_A и I_C центры вписанных окружностей в треугольники ABD и CBD, а через B' точку касания вписанной окружности со стороной AC. Докажите, что угол $I_AB'I_C$ — прямой.

13. Пусть A_0, B_0 и C_0 — точки касания вневписанных окружностей с соответствующими сторонами треугольника ABC. Описанные окружности треугольников A_0B_0C, AB_0C_0 и A_0BC_0 пересекают второй раз описанную окружность w треугольника ABC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику, образованному точками касания вписанной окружности треугольника ABC с его сторонами.

14. Дан треугольник ABC и окружность с центром O, проходящая через вершины A и C и повторно пересекающая отрезки AB и BC в различных точках K и N соответственно. Окружности, описанные около треугольников ABC и KBN, имеют ровно две общие точки B и M. Докажите, что угол OMB — прямой.

15. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC биссектриса острого угла между высотами AA_1 и CC_1 пересекает стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Биссектриса угла B пересекает отрезок, соединяющий ортоцентр треугольника ABC с серединой AC, в точке R. Докажите, что точки P, B, Q и R лежат на одной окружности.

16. Дан четырехугольник $ABCD$ такой, что $BC = AD$ и BC не параллельна AD. На сторонах BC и AD выбраны такие точки E и F, что $BE = DF$. Диагонали

AC и BD пересекаются в точке P, прямые BD и EF — в точке Q, прямые EF и AC — в точке R. Докажите, что окружности, описанные около треугольников PQR (при изменении положений точек E и F), проходят через одну точку, отличную от P.

Игры

1. На столе лежат 2014 монет. За ход разрешается объединить две одинаковые кучки в одну. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

2. Каждой вершине куба поставлено в соответствие некое неотрицательное действительное число, причем сумма всех этих чисел равна 1. Двое играют в следующую игру. Первый выбирает любую грань куба, второй выбирает другую грань, и, наконец, первый выбирает третью грань куба. При этом выбирать грани, параллельные уже выбранным, нельзя. Докажите, что первый игрок может играть так, чтобы число, соответствующее общей вершине трех выбранных граней, не превосходило $1/6$.

3. Есть 9 коробок соответственно с $1, 2, \ldots, 9$ фишками. Двое по очереди берут по одной фишке из любой коробки, при необходимости открывая её. Проигрывает тот, кто последним распечатает коробку. Кто из них выиграет независимо от игры соперника?

4. Аня и Боря по очереди (начинает Аня) расставляют в клетках таблицы 6×6 вещественные числа. Ставить число, которое уже стоит в какой-либо клетке, нельзя. После того, как вся таблица заполнена, в каждой строке закрашивают черным клетку с наибольшим числом. Аня выигрывает, если можно провести ломаную, соединяющую верхнюю сторону таблицы с нижней и лежащую целиком в черных клетках. В противном случае выигрывает Боря. Кто выиграет при правильной игре?

5. *Король-самоубийца.* На шахматной доске размером 1000×1000 стоит черный король и 499 белых ладей. Докажите, что при произвольном начальном расположении фигур король может встать под удар белой ладьи, как бы не играли белые. (Ходы делаются так же, как и в обычных шахматах).

6. Два пирата делят добычу, состоящую из двух мешков монет и алмаза, действуя по следующим правилам. Вначале первый пират забирает себе из любого мешка несколько монет и перекладывает из этого мешка в другой такое же количество монет. Затем также поступает второй (выбирая мешок, из которого он берет монеты, по своему усмотрению), и т. д. до тех пор, пока можно брать монеты по такому правилу. Пирату, взявшему монеты последним, достается алмаз. Кому достанется алмаз, если каждый из пиратов стремится получить его? Дайте ответ в зависимости от первоначального количества монет в мешках.

7. Написано 20 чисел: $1, 2, \ldots, 20$. Двое играющих по очереди ставят перед этими числами знаки «$+$» и «$-$» (знак можно поставить перед любым свободным числом). Первый стремится к тому, что бы полученная после расстановки всех 20 знаков сумма была как можно меньше по модулю. Какую наибольшую по модулю сумму может себе обеспечить второй?

8. Написан многочлен $x^{10} + *x^9 + *x^8 + \ldots + *x + 1$. Двое играют в такую игру. Сначала первый заменяет любую из звездочек некоторым числом, затем второй заменяет одну из оставшихся звездочек, затем снова первый и т. д. (всего 9 ходов). Если у полученного многочлена не будет действительных корней, то выигрывает первый игрок, а если хотя бы 1 корень будет — второй. Кто выиграет при правильной игре?

9. В микросхеме 2000 контактов. Изначально любые два контакта соединены отдельным проводом. Хулиганы Вася и Петя по очереди перерезают провода. Причем Петя (он начинает) за ход режет один провод, а Вася — либо один, либо три провода. Хулиган, отрезающий последний провод от какого-либо контакта, проигрывает. Кто из них выиграет при правильной игре?

Инварианты

1. **(a)** В вершине A_1 правильного 12-угольника $A_1A_2\dots A_{12}$ стоит знак минус, а в остальных — плюсы. Разрешается одновременно изменять знак в любых шести последовательных вершинах многоугольника. Докажите, что за несколько таких операций нельзя добиться того, чтобы в вершине A_2 оказался знак минус, а в остальных вершинах — плюсы.
(b) Докажите то же утверждение, если разрешается менять знак одновременно в трех последовательных вершинах многоугольника.

2. С многоугольником разрешается проделывать следующие операции. Можно отрезать от него прямой, которая пересекает его стороны в точках A и B соответственно, некий кусок, перевернуть его и приложить обратно тем же отрезком AB. Можно ли такими операциями получить
(a) из правильного шестиугольника со стороной 1 правильный треугольник со стороной $\sqrt{6}$;
(b) из квадрата хоть какой-нибудь треугольник.

3. В вершинах правильного n-угольника с центром в точке O расставлены числа $+1$ и -1. За один шаг разрешается изменить знак у всех чисел, стоящих в вершинах какого-либо правильного k-угольника с центром в точке O. При этом мы допускаем и 2-угольники. Докажите, что существует такое первоначальное расположение $+1$ и -1, что из него ни за какое число шагов нельзя получить набор из одних $+1$.
(a) $n = 15$; **(b)** $n = 30$; **(c)** n — любое число, большее 2.

4. По кругу центрально-симметрично сидят 10 кузнечиков. За ход какой-то кузнечик перепрыгивает через своего соседа так, что бы этот сосед был серединой между начальной и конечной точкой кузнечика. Причем кузнечику разрешается так прыгнуть, только если за свой прыжок он пролетит только над одним кузнечиком (над тем соседом, через которого прыгает). Может ли так получиться, что через некоторое количество ходов 9 кузнечиков оказались на своих местах, а десятый в точке на той же дуге (между теми же кузнечиками, что изначально), но не на своем месте?

Полуинварианты

1. В парламенте у каждого парламентария есть не более трех врагов. Разделите парламент на две палаты так, чтобы у каждого парламентария было не более одного врага в его палате.

2. Дано n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Постройте несамопересекающуюся ломаную с узлами в этих точках.

3. В конкурсе «Международный фестиваль патриотической песни» участвуют несколько стран. Известно, что каждая песня оскорбительна не более чем для трех других стран. Каждая страна, исполнив песню, тут же уезжает и не слышит песни, прозвучавшие после неё. Расположите страны в таком порядке, чтобы каждая страна выслушала не более трех оскорблений.

4. На плоскости даны n красных и n синих точек. Пронумеруйте точки каждого цвета числами от 1 до n так, чтобы отрезки, соединяющие точки с одинаковыми номерами, не пересекались.

5. На плоскости даны n точек и n попарно непараллельных прямых. Пронумеруйте точки и прямые числами от 1 до n так, чтобы отрезки перпендикуляров, опущенных из соответствующих точек на соответствующие прямые, соединяющие точки с одинаковыми номерами, не пересекались.

6. Дан граф, каждая вершина которого степени не больше 5 (не более 5 ребер в каждой вершине). Докажите, что можно «почти правильно» раскрасить его в три цвета, а именно, так, чтобы не более $[n/2]$ ребер соединяли вершины одного цвета.

7. Дан граф — несколько городов, соединенных дорогами так, что из каждого города выходит нечетное число дорог. Некоторые из городов раскрашены в красный цвет, а некоторые — в белый. В городе может произойти революция, если большинство его соседей раскрашено не в тот же цвет, что он сам. Каждый день ровно в одном из городов происходит революция, и он меняет цвет на тот, в который раскрашено большинство его соседей. Докажите, что в конце концов революции прекратятся.

8. Дан граф — несколько городов, соединенных дорогами так, что из каждого города выходит нечетное число дорог. Некоторые из городов раскрашены в красный цвет, а некоторые — в белый. В городе может произойти революция, если большинство его соседей раскрашено не в тот же цвет, что он сам. Каждый ход революция одновременно происходит во всех городах, в которых она может произойти, и они меняют цвет на тот, в который было раскрашено большинство их соседей. Докажите, что начиная с определенного момента любой город либо остановится на некотором цвете, либо будет менять цвет каждый ход.

9. На книжной полке каким-то образом расставлены тома полного собрания сочинений Васи Пупкина. Пьяный библиотекарь пытается расставить их по порядку. Для этого он берет два тома (не обязательно соседних), которые стоят относительно друг друга не по порядку (то есть больший номер раньше меньшего), и переставляет их местами. Докажите, что в конце концов он расставит книги по порядку.

10. На книжной полке каким-то образом расставлены тома полного собрания сочинений Васи Пупкина. Пьяный библиотекарь пытается расставить их по порядку. Для этого он берет какой-то том, стоящий не на своем месте, сдвигает несколько промежуточных томов, и ставит этот том на место. Докажите, что в конце концов он расставит книги по порядку.

11. В некотором порядке расставлены $mn + 1$ различных чисел. Докажите, что можно указать либо $m + 1$ чисел, расположенных в порядке убывания, либо $n + 1$ чисел, расположенных в порядке возрастания.

12. *Звёздчатый многоугольник* — это многоугольник, из некоторой точки внутри которого можно увидеть все вершины и стороны. Пусть дан звёздчатый многоугольник. С ним производится следующая операция: берутся два соседних ребра, образующих невыпуклый угол, на них строится параллелограмм вовне многоугольника. Исходные ребра стираются, вместо них вставляются противоположные ребра параллелограмма.

Докажите, что такой процесс в конце концов приведет к выпуклому многоугольнику, и остановится.

13. **(a)** В парламенте некоторые депутаты залепили некоторым другим пощечины, причем каждый депутат залепил не более одной пощечины (пощечины не рефлексивны: если A ударил B, то, возможно, не наоборот). Докажите, что можно разбить парламент на три палаты так, чтобы в каждой палате не было дерущихся пар депутатов.

(b) Решите задачу в случае не более двух пощечин и пяти палат.

Графы

1. В стране 2014 городов, и из каждого выходит не менее, чем 93 дороги. Известно, что из каждого города можно добраться до любого другого. Докажите, что это можно сделать с не более, чем 63 пересадками.

2. В королевстве 16 городов. Король хочет соединить их дорогами так, что бы из каждого города выходило не более 4 дорог и из любого можно было добраться до любого другого, сделав не более 1 пересадки. Сможет ли он это сделать?

3. В стране несколько городов, некоторые пары которых соединены дорогами, причем между любыми двумя городами существует единственный несамопересекающийся путь. Также известно, что ровно из 100 городов выходит по 1 дороге. Докажите, что в стране можно построить не более 50 дорог так, что при закрытии на ремонт любой дороги, по прежнему можно будет добраться из каждого города в каждый.

4. Докажите, что хотя бы одна из граней многогранника имеет не более 5 сторон.

5. Есть натуральные числа $k \leqslant m < n$. Известно, что в графе степени всех вершин не меньше m и не больше n. Докажите, что из него можно выкинуть несколько ребер, что бы степени всех вершин стали не больше $n - k$ и не меньше $m - k$.

6. В некоторой стране есть военные базы, соединенные между собой дорогами. Множество дорог называется *важным*, если после закрытия этих дорог найдутся две базы, между которыми нельзя будет проехать. Важное множество дорог называется *стратегическим*, если оно не содержит меньшего важного множество. Зафиксируем два стратегических множества и рассмотрим дороги, которые принадлежат ровно одному из этих множеств. Докажите, что эти дороги образуют важное множество.

7. На берегу круглого озера расположены населенные пункты. Между некоторыми из них курсируют теплоходы. Причем известно, что из A в B и обратно курсируют теплоходы тогда и только тогда, когда между следующими за ними по кругу A' и B' теплоходы не курсируют. Докажите, что из любого населенного пункта можно добраться в любой другой, сделав не более 2 пересадок.